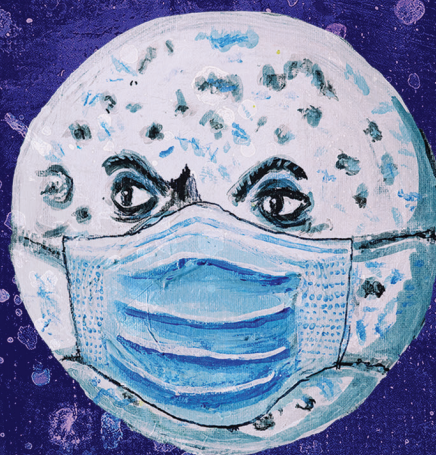


Vuelos espaciales y ciencia ficción

José Fernando Isaza Delgado | Diógenes Campos Romero



EDITORIAL
UTADEO

José Fernando Isaza Delgado

Ingeniero eléctrico de la Universidad Nacional de Colombia, con Maestría en Matemáticas de la Universidad de Strasbourg y maestría en Física de la Universidad Nacional de Colombia. Doctor Honoris Causa de la Universidad de Caldas y doctor Honoris Causa de la Universidad Nacional de Colombia. Es miembro honorario de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Ha sido profesor de la Universidad Nacional de Colombia, de la Universidad de los Andes, de la Escuela de Ingeniería Julio Garavito, de la Universidad Javeriana y de la Universidad Central en las áreas de matemáticas, física vuelos espaciales y física de la ciencia ficción. También ha sido autor y coautor de libros en las áreas de energía, cambio climático, gravitación, ecología y sistemas dinámicos.

Fue miembro del grupo de investigación de las Naciones Unidas, Gobierno de Canadá, en energías en países en vías de desarrollo (1983-1985), así como miembro del grupo Misión de Sabios Colombia 2019, en el área de energías renovables.

Ha sido miembro del Consejo Superior de la Universidad Nacional de Colombia y Rector de la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano; actualmente, forma parte de su Consejo Directivo.

Vuelos espaciales y ciencia ficción

José Fernando Isaza Delgado
Diógenes Campos Romero

Isaza Delgado, José Fernando, 1946-

Vuelos espaciales y ciencia ficción / José Fernando Isaza Delgado, Diógenes Campos Romero. - Bogotá: Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, 2021.

252 páginas : ilustraciones, figuras, gráficas, fórmulas, tablas ; 24 cm.

ISBN 978-958-725-310-8

1. Viajes interplanetarios. 2. Ciencia ficción. 3. Espacio exterior. 4. Física - Teorías. 5. Ciencia y tecnología. 6. Astronáutica. 7. Propulsión eléctrica. 8. Marte (Planeta). 9. Cuerpos celestes. I. Campos Romero, Diógenes, autor. II. Tít.

CDD 629.41

Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano

Carrera 4 N° 22-61 - PBX 2427030 - www.utadeo.edu.co

© José Fernando Isaza Delgado, Diógenes Campos Romero

© Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano

Carlos Sánchez Gaitán

RECTOR

Andrés Franco Herrera

VICERECTOR ACADÉMICO

Liliana Álvarez Revelo

VICERECTORA ADMINISTRATIVA

Marco Giraldo Barreto

JEFE DE PUBLICACIONES

ISBN impreso: 978-958-725-310-8

ISBN epub: 978-958-725-312-2

ISBN digital: 978-958-725-311-5

DOI: <https://doi.org/10.21789/9789587253108>

EQUIPO EDITORIAL

Marco Giraldo Barreto

JEFE DE PUBLICACIONES

Luis Carlos Celis Calderón

COORDINACIÓN GRÁFICA Y DISEÑO

Sylvana Blanco Estrada

PROFESIONAL DE DISEÑO EDITORIAL

Juan Carlos García

COORDINACIÓN REVISTAS

Sandra Guzmán

DISTRIBUCIÓN Y VENTAS

María Teresa Murcia

ASISTENTE ADMINISTRATIVA

EDICIÓN

Marco Giraldo Barreto

CORRECCIÓN DE ESTILO

Federico Guerrero Isaza

Inspirada en una idea de Georges Méliès

ILUSTRACIÓN DE CUBIERTA

Luis Carlos Celis Calderón

DISEÑO PORTADA

Diógenes Campos Romero

DIAGRAMACIÓN

Diógenes Campos Romero

Marco Giraldo Barreto

REVISIÓN EDITORIAL

Imageprinting Ltda.

IMPRESIÓN

En nombre de la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, Editorial Utadeo le agradece a usted, el lector de esta obra, por apoyar la labor de todas las personas que hacen posible este trabajo al adquirir este libro de manera legal. Asimismo, le agradecemos el interés por el conocimiento que producen nuestros investigadores y el apoyo para que este saber tenga mayor alcance.

Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano | Vigilada Mineducación.
Reconocimiento de personería jurídica: Resolución No. 2613 de 14 de agosto de 1959, Minjusticia.
Acreditación institucional de alta calidad, 6 años: Resolución 4624 del 21 de marzo de 2018, Mineducación.

Impreso en Colombia - Printed in Colombia © Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano.
Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin autorización de la universidad.

*A la memoria de mi padre Darío
Isaza, quien me envió a la
lectura y pude así disfrutar de las
aventuras de Superman y Buck
Rogers*

José Fernando Isaza Delgado

Índice general

1. Ciencia ficción, relatividad, fantasía	15
1.1. De la ciencia ficción a la física teórica	16
1.2. Haz de fotones como fuerza impulsora	20
1.3. Viaje intergaláctico	25
1.4. Cuadrivectores	35
1.5. Transformación espacio-tiempo de la nave acelerada	45
1.6. Satélites, GPS, relatividad	49
1.7. Métrica de Schwarzschild	58
1.8. Ciencia Ficción - Interestelar	64
1.9. Solución de Schwarzschild	69
Referencias	77
2. Maniobras con ayuda gravitacional planetaria	81
2.1. Introducción	82
2.2. Maniobra gravitacional vista desde el planeta	87
2.3. Maniobra gravitacional vista desde el Sol	89
2.4. El proceso 3D de asistencia gravitacional	94
2.5. Geometría del movimiento hiperbólico	102
2.6. Cálculos asociados con el periastro	107
2.7. Maniobra alrededor del planeta Saturno	112
Referencias	116

3. Propulsión eléctrica	119
3.1. Propulsión eléctrica	119
3.2. Tecnologías	122
3.3. Impulsor electrostático de iones	126
Referencias	140
4. De la ficción a la realidad: el amortizaje	143
4.1. Perseverancia	144
4.2. Misiones de exploración de Marte	146
4.3. Algunas características de Marte	152
4.4. Dinámica de la nave en la parte superior de la atmósfera	158
4.5. El caso del astromóvil <i>Opportunity</i>	164
4.6. Misión <i>MARS 2020, Perseverance Rover</i>	173
4.7. Entrada, descenso y amortizaje	184
4.8. Sonda china <i>Tianwen-1</i>	195
4.9. Misión Emiratos-Marte	198
4.10. Conclusión	203
Referencias	208

5. Exploración de pequeños cuerpos celestes	211
5.1. Elementos históricos	212
5.2. <i>Hayabusa</i>	214
5.3. <i>Hayabusa 2</i>	225
5.4. Esbozo del cálculo de trayectorias de descenso	235
Referencias	243
Índice alfabético	247

Prefacio

Física de los vuelos espaciales (2021) y *Vuelos espaciales y ciencia ficción* son obras complementarias con las cuales buscamos introducir al lector en ideas relacionadas con los avances en la conquista del espacio.

Ha pasado mucho tiempo desde 1903, cuando los hermanos Wright lograron realizar un corto vuelo en el *Wright Flyer*, y Konstantin E. Tsiolkovsky publicó la *Investigación sobre el espacio interplanetario con la ayuda de cohetes*. Poco tiempo después, Albert Einstein formuló, en 1905, la teoría especial de la relatividad; en 1915, la teoría general de la relatividad, y en 1916 predijo la existencia de ondas gravitacionales.

Las contribuciones anteriores, en unión con las de muchos otros pioneros, han dado lugar a importantes avances en la ciencia y en la tecnología. Hoy en día, la humanidad dispone de redes satelitales de navegación con cobertura de la superficie terrestre, y los relojes atómicos de los satélites se ajustan con base en correcciones relativistas. En las películas *Viaje a las estrellas* e *Interstellar*, la ciencia ficción ha contribuido a expandir nuestra imaginación sobre posibles desarrollos futuros o a creer, como lo enunció Julio Verne, que “todo lo que una persona puede imaginar, otros podrán

hacerlo realidad”. Cien años después de la predicción de Einstein, se detectaron por primera vez las ondas gravitacionales.

Autores de ciencia ficción influenciaron a Wernher von Braun, quien en 1953 escribió su libro *The Mars Project*. La utopía de ese entonces avanza en su realización, pues varios países han enviado misiones no tripuladas al planeta rojo. Igualmente, se han desarrollado misiones que han tenido como destino la visita a asteroides que orbitan alrededor del Sol, lo que ilustramos con las misiones japonesas *Hayabusa* y *Hayabusa 2*.

Este libro contribuye a la difusión de la ciencia en temas sobre la conquista del espacio, con el propósito de ayudar a los lectores en encontrar su vocación y consolidar su interés por las carreras científicas y técnicas. Este trabajo establece también vasos comunicantes con la ciencia ficción, en reconocimiento a lo que expresa Aliette de Board (*Nature*, vol. 552, 333, diciembre de 2017):

La ciencia ficción puede decirnos a qué conducirá la investigación, el tipo de sociedades y tipo de vidas que estamos configurando. Puede informarnos sobre el uso de la ciencia, de la conciencia y la ética, y del propósito y la visión que hay detrás de los descubrimientos, que son incentivos importantes para realizarlos. También nos habla de las enormes desigualdades entre los que se benefician de los avances científicos y la riqueza, y los que se quedan atrás.

Los siguientes comentarios preliminares buscan facilitar la lectura del documento:

1. Las referencias se citan en cada capítulo usando un paréntesis cuadrado y un número [#] (por ejemplo [5]), y el conjunto se incluye al final de cada capítulo.
2. Por convención, usamos el punto (.) como separador decimal y un espacio en blanco para separar la parte entera en millares, si ésta tiene cinco o más dígitos. Esta preferencia se debe a que buena parte de los cálculos realizados se hicieron en Wolfram-Mathematica, aplicación que utiliza el punto como separador decimal.

Agradecimiento a Marco Giraldo Barreto, editor de publicaciones de la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, por las cuidadosas correcciones de estilo realizadas en el documento y por su valiosa e integral contribución a la realización de este trabajo, al igual que a Luis Carlos Celis Calderon de la oficina de publicaciones.

Los autores

Bogotá D.C., julio de 2021

Capítulo 1

Ciencia ficción, relatividad, fantasía

El entrelazamiento entre ciencia, ciencia ficción y realizaciones tecnológicas contribuye a la difusión del conocimiento científico y al proceso de enseñanza. La teoría de la relatividad (especial y general, 1905 y 1915) de Einstein desempeña un papel fundamental en el sistema de navegación global por satélite (GPS), además de desplegar nuestra imaginación sobre viajes intergalácticos como los de la serie *Star Trek* [1, 2]. El director científico de la película de ciencia ficción *Interstellar* [3] contribuyó a poner en marcha el observatorio LIGO que detectó en 2015 por primera vez ondas gravitacionales, cien años después de 1916, año en el Albert Einstein predijo su existencia. En 2019, se presentó la primera la imagen de un agujero supermasivo, construida combinando señales de ocho telescopios ubicados en diferentes partes del mundo.

1.1. De la ciencia ficción a la física teórica

Las tiras cómicas de *Superman* y las películas de superhéroes de la década de 1950 despertaron en muchos la curiosidad por la física y, en especial, por la misteriosa teoría de la relatividad. La posibilidad de viajes intergalácticos, de viajes en el tiempo, de obtener inmensas cantidades de energía, unido al desconocimiento casi absoluto de esas mágicas teorías, nos condujeron a muchos, aun niños, a interesarnos y poco a poco volvernos adictos a la física teórica.

El creador de Superman resolvía fácilmente el viaje al pasado: hacía que el héroe orbitase alrededor de la Tierra, aumentando la velocidad hasta que, al sobrepasar la velocidad de la luz, llegaba al pasado. De esta forma podía evitar una catástrofe que estuviera sucediendo o hacerle más difícil la vida a los admiradores de su amor Luisa Lane. El guionista, quien conocía algo de la variación del tiempo cuando un sistema (en este caso, Superman) aumentaba su velocidad (denomínese v), tal vez vio la fórmula que relacionaba los tiempos, y si la velocidad se hacía igual a la de la luz (velocidad c), un cero aparecía. Pasando por alto las leyes de la física y la matemática, extrapoló algo de este estilo:

$$\text{tiempo}_1 = \text{tiempo}_2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad (1.1)$$

Si $v > c$, el radical se hace negativo, por lo tanto la raíz es negativa (¡horror!) y el objeto va al pasado. Para el autor, $\sqrt{-a^2} = -a$ y no como debe ser, $\sqrt{-a^2} = i|a|$.

Ni los asiduos lectores, ni el dibujante, ni los precoces aficionados sabíamos sobre la energía necesaria para que Superman alcanzara velocidades comparables a la velocidad de la luz, ni que el cambio de masa crea unas fuerzas gravitacionales en la Tierra que causarían un daño mayor que la catástrofe que planeaba evitar. Ninguna de estas era motivo de preocupación; simplemente ignorábamos esos fenómenos físicos.

Tampoco nos preocupábamos como resolvía problemas de vuelo que permitían al protagonista aumentar su velocidad: en la atmósfera, la forma de hacerlo es con aspas o con turbinas de propulsión. Podría también utilizar la velocidad del viento, pero esta alternativa no le da suficiente impulso. Algunos lectores podrían pensar en un sistema de absorción y expulsión del aire que permitiría, como en cualquier avión, aumentar la velocidad. El problema, sin solución, es: ¿cómo aumentar la velocidad cuando se viaja en el vacío del espacio?

En un cortometraje de 1950 se muestra el viaje del bebé Superman desde Krypton hasta la Tierra. La ingenuidad estilística de la película es maravillosa. Krypton debe ser un exoplaneta, suponiendo

que no estuviese muy alejado del exoplaneta más cercano al sistema solar, *Próxima Centauri b*, ubicado alrededor de la estrella *Próxima Centauri a* 4.2 años luz; la velocidad de la nave debería ser cercana a c y el combustible no podría ser químico convencional. El laboratorio de los padres de Superman, Jor-El y Lara Lor-Van, tiene similitud a una cocina moderna. El combustible debería ser antimateria, y se trasvasaba en un bidón que no parecía apropiado para la manipulación de partículas y antipartículas. En la época de los 50, no estaba muy afianzada la idea de antimateria, que había sido posibilitada por Paul Dirac (1902 - 1984) en 1928. Lo que es sorprendente es que Superman llega a la Tierra siendo casi un bebé. ¿Es posible realizar un viaje de más de 4 años luz y que solo hayan transcurrido para el viajero unos pocos meses? La respuesta es sí, sin violar las leyes de la relatividad y viajando a una velocidad inferior a c , y su nombre técnico es viaje en el espacio de Rindler, tema a desarrollar en el acápite 1.4.

La primera película de ciencia ficción fue realizada en 1902 por el mago y director Georges Méliès y está inspirada en la obra de Julio Verne *Viaje a la Luna*. Para lanzar la nave tripulada, emplea un gigantesco cañón de 1 kilómetro de largo; evoca los cañones con los que Prusia le ganó la guerra a Francia en 1871. Méliès no es tan instruido como Verne: la tripulación viaja sin oxígeno, localiza la Tierra más abajo de la luna para el regreso, y simplemente arroja el cohete a la Tierra. Verne sabe que no tiene forma de regresar la

nave, sin dejar que la tripulación alunice, pues la falta de oxígeno la mataría. Su solución es poco humanitaria: los deja orbitando alrededor de la Luna.

El problema de lanzar un cohete con un cañón es la elevada aceleración que se requiere para lograr la velocidad de escape. Suponiendo una longitud de 1 kilómetro para el cañón y una velocidad de escape de 10 km/seg, la aceleración media es

$$\bar{a} = \frac{V_f^2}{2\ell} = 50\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 5\,000g, \quad (1.2)$$

($g \approx 9.81\text{m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad en la Tierra).

A partir de 1960 se producen películas que recurren al concepto de *agujero de gusano* que permite en corto tiempo realizar viajes intergalácticos sin perder contacto espacio-temporal con el planeta de origen. En 1968, Stanley Kubrick realiza *2001 Odisea del Espacio*; Arthur Clarke es el asesor científico del film, a la vez es el que hace el diseño conceptual de la órbita geoestacionaria. En 2014 se estrena *Interstellar*, dirigida por Christopher Nolan. cuyo director científico fue Kip Thorne. La película ganó el Oscar a mejor filme del año, y poco después Thorne recibió el Nobel de física por su trabajo en el experimento LIGO (*Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory*), el detector de ondas gravitacionales.

1.2. Haz de fotones como fuerza impulsora

En el antiguo testamento de la biblia se narra la ascensión al cielo del profeta Elías, arrastrado por un carro de fuego a las alturas celestiales. Esta mención anticipa la idea del cohete propulsado por combustible.

Otro viaje exitoso al espacio está en Enoc (o libro de Henoc). No es muy detallada la forma en que se logró; la Biblia solo dice “Y caminó Enoc con Dios, después que engendró a Matusalén, trescientos años, y engendró hijos e hijas. . . . Caminó, pues, Enoc con Dios, y desapareció, porque le llevó Dios” (Gn 5.22-24).

Más conocida es la ascensión de Jesús al cielo, acontecimiento descrito en el nuevo testamento: “Dicho esto, mientras ellos lo estaban mirando, Jesús fue levantado, y una nube lo envolvió y no lo volvieron a ver. Y mientras miraban fijamente al cielo, viendo cómo Jesús se alejaba, dos hombres vestidos de blanco se aparecieron junto a ellos y . . .” (Hechos 1:9-11). Aunque no aparece en las notas bíblicas, la Iglesia Católica acepta otro viaje exitoso a las esferas del universo, la asunción de María: “. . . , terminado el curso de su vida terrena fue asunta en cuerpo y alma a la gloria celestial”.¹

¹ Pío XII definió como dogma de fe la asunción de María en 1950 con la constitución apostólica *Munificentissimus Deus*.

Los autores modernos de ciencia ficción enfrentan el problema de llevar naves tripuladas fuera del sistema solar y aún a otras galaxias. Como se sabe, con las generaciones actuales de combustible no es posible alejarse del sistema solar, aún para llegar a la estrella más cercana se requieren más de 30 000 años de viaje. En *Viaje a las estrellas*, ante una falla de los motores de propulsión, Spock —Leonard Nimoy, “Larga vida y prosperidad” —propone que se utilicen los cañones de rayos laser como fuerza impulsora. La idea es correcta, la velocidad de salida del rayo es la de la luz. Se crearía un momento de magnitud, pero la limitante es que la masa equivalente del rayo es tan pequeña que no es suficiente para transferir momento lineal significativo a la nave.

Las ideas que se estudiaron para lograr eso en un futuro viaje interestelar deben mencionarse:

- Energía de fisión nuclear.
- Energía solar.
- Energía de combinación de materia y antimateria.

En la actualidad, los aceleradores de partículas producen anualmente antimateria en cantidades ínfimas. Se estima que para producir 1 gramo de antimateria, el CERN requerirá 100 000 millones de años, y aún si se aumentara en varios órdenes de magnitud la

producción de antimateria, la tecnología no está lista para evitar que se desintegre casi inmediatamente.

Siguiendo a W. Wiesel [4], en su libro *Spaceflight Dynamics* se muestra el cálculo de la cantidad de antimateria necesaria para llevar un cohete a velocidades cercanas a la de la luz. Se considera que todo el impulso se produce en un instante, y en esas condiciones la aceleración tiende a infinito. En el universo no hay magnitudes infinitas, y una aceleración muy alta no la resisten ni los materiales ni el cuerpo humano. Estamos en ciencia ficción.

Sea un cohete relativista con las siguientes características:

$$\begin{aligned} m_0 &= \text{masa útil} + \text{combustible} \\ &+ \text{partes desechables del cohete,} \\ m_f &= \text{masa útil,} \end{aligned}$$

y médase la carga útil por la relación

$$\alpha = \frac{m_f}{m_0}.$$

La energía en reposo del cohete es m_0c^2 y la energía de radiación es dada por $E_{\text{radiación}} = p_r c$, donde p_r es la energía del haz radiado y c la velocidad de la luz. Asumiendo momento inicial nulo,

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final del cohete}} + E_{\text{radiación}}. \quad (1.3)$$

Es decir,

$$m_0c^2 = \frac{\alpha m_0 \times c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + E_{\text{radiación}}, \quad (1.4)$$

donde v es la velocidad que adquiere el cohete ulterior al despegue de la base de lanzamiento. Introduciendo el factor de Lorentz (γ),

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (1.5)$$

la conservación del momento expresa

$$0 = (\alpha m_0 \gamma) v - \frac{E_{\text{radiación}}}{c}. \quad (1.6)$$

Por lo tanto, la expresión (1.4) se reescribe en la forma

$$\begin{aligned} m_0c^2 &= \alpha m_0 \gamma c^2 v + \alpha m_0 v \gamma c \\ &= \alpha m_0 \gamma c^2 + \alpha m_0 c^2 \gamma \times \frac{v}{c} \\ &= \gamma \alpha m_0 (1 + \beta) c^2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Simplificando la expresión anterior, se obtiene

$$\alpha = \frac{1}{\gamma(1 + \beta)} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (1.8)$$

Se observa que si $\beta \rightarrow 1$, el factor de carga útil tiende a cero ($\alpha \rightarrow 0$). Así, si se quiere obtener una velocidad $0.99c$, se tiene $\alpha = 0.0708881 \approx 0.071$. Para una carga útil de 100 kilos, la masa m_{com} del combustible requerido se determina de la ecuación

$$\alpha = \frac{100}{100 + m_{\text{com}}},$$

que conduce al valor $m_{\text{com}} = 1308.45$ kg.

En el caso de un viaje a Marte con $m_f = 350$ kg de carga útil, asumiendo una velocidad del cohete de 53 km/s, se tiene

$$\beta = \frac{53}{300\,000} = 0.00017667 \ll 1,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = 0.999823.$$

Obsérvese que la aproximación

$$\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \approx (1 - \beta)(1 - \beta) = (1 - \beta)^2,$$

conduce a la expresión $\alpha \approx (1 - \beta)$, la cual permite reproducir el valor que hemos obtenido para α :

$$\alpha \approx (1 - \beta) = 0.999823.$$

Para una carga útil de 350 kg, la masa m_{com} del combustible requerido se determina por la ecuación

$$\alpha = \frac{350}{350 + m_{\text{com}}},$$

lo que implica $m_{\text{com}} = 0.06196 \text{ kg} = 61.96 \text{ gramos}$.

1.3. Viaje intergaláctico

Es pertinente recordar la ecuación clásica del cohete,

$$v(t) - v(t_0) = u \ln \left(\frac{m(t_0)}{m(t)} \right), \quad u > 0. \quad (1.9)$$

conocida como la ecuación de Tsiolkovsky [5]. En (1.9), la cantidad $m(t_0) = M_1 + M_2$ es la masa total inicial del cohete, donde M_1 es la masa del cohete con todo su contenido (excepto el combustible) y M_2 la masa del combustible en el instante inicial t_0 ; la cantidad $m(t) = M_1 + M(t)$ designa la masa del cohete en el instante t . Cuando el combustible se agota completamente, digamos que en el instante t_f ($t_f > t_0$, $M(t_f) = 0$), se logra el máximo cambio en la velocidad, que en ausencia de fuerzas externas F_{ex} se expresa como sigue:

$$\Delta v = v(t_f) - v(t_0) = u \ln \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right), \quad u > 0, \quad (1.10)$$

Las ecuaciones anteriores deben modificarse cuando los efectos relativistas llegan a ser relevantes, es decir, para velocidades altas, cercanas a la velocidad de la luz c .

En la serie *Star Trek* son frecuentes los viajes intergalácticos; para esto se requiere un combustible no especificado. En ocasiones, cuando falla el motor, el comandante Kirk de la nave *Enterprise* dirige el cañon láser hacia la retaguardia, lo activa y este opera como fuente de impulso. La idea es correcta: la velocidad de expulsión de un fotón es por supuesto c y tiene masa equivalente muy pequeña, $E = \hbar\omega/c^2$. En la película funciona la idea.

Para hacer los cálculos en el caso relativista, comenzamos especificando el sistema de referencia del observador, el cual ubicamos con origen O en el centro de impulso (CDI) del cohete (figura 1.1). Considérese ahora dos instantes de tiempo separados infinitesimalmente:

- En un instante dado, el cohete tiene velocidad cero con respecto al sistema de referencia CDI y su masa es $m + dm$.
- En un instante posterior e infinitesimalmente cercano, el cohete expulsa la masa dm con velocidad $u > 0$, en dirección contraria a la dirección de movimiento del cohete, lo que incrementa

la velocidad del cohete en dv . En consecuencia, el centro de masa del cohete se separa del centro de momento del sistema e imprime al cohete una velocidad con respecto al sistema de referencia CDI.

En el sistema de referencia CDI, el momento lineal es nulo, por lo que se deduce la relación $mdv = -vdm$. Para tener en cuenta la variación de la masa con la velocidad, y que el incremento de la velocidad del cohete es diferente medido en el sistema de referencia del cohete y en el sistema de referencia de la base de

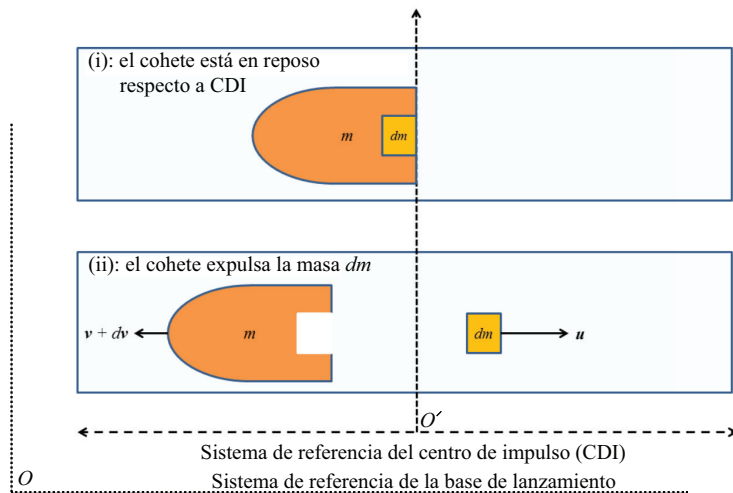


Figura 1.1. El origen O' del sistema de referencia inercial se elige en el centro de impulso (CDI) del cohete, por lo que este tiene una velocidad nula con respecto al sistema CDI. Fuente: adaptado de Bruce [6].

lanzamiento, escribimos:

$$mdv' = -udm, \quad dm = \gamma(u)dm_0, \quad (1.11)$$

donde $m(t)$ es la masa instantánea del cohete en cualquier instante de tiempo t ; dv' es el incremento de velocidad en el intervalo de tiempo dt , y u es la velocidad de expulsión de los gases con relación al cohete, que en el caso del cohete fotónico es $u = c$.

Aplicando la ley de adición de velocidades, se tiene

$$v + dv = \frac{v + dv'}{1 + vdv'/c^2}, \quad (1.12)$$

$dv' \ll c$, por lo tanto $(1 + vdv'/c^2)^{-1} \approx 1 - vdv'/c^2$, de donde

$$\begin{aligned} v + dv &= (v + dv') \left(1 - \frac{vdv'}{c^2} \right) \\ &\approx v + dv' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

De esta expresión, se obtiene

$$dv = \frac{1}{\gamma^2(v)} dv', \quad (1.14)$$

donde introducimos la relación de velocidades β y el factor de Lorentz $\gamma(v)$, definidos así:

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (1.15)$$

De (1.14) despejamos dv' y la sustituimos en (1.11), para obtener

$$\begin{aligned} m\gamma^2(v)dv &= -udm, \\ m\frac{1}{(1 - \beta^2)}dv &= -udm. \end{aligned} \quad (1.16)$$

De la definición de β se tiene $dv = cd\beta$, por lo que (1.16) se expresa en la forma

$$\frac{d\beta}{(1 - \beta^2)} = -\frac{u}{c} \times \frac{dm}{m}. \quad (1.17)$$

El cambio de variables

$$\beta = \tanh(\phi), \quad d\beta = \operatorname{sech}^2(\phi)d\phi \quad (1.18)$$

y la identidad trigonométrica $1 - \beta^2 = \operatorname{sech}^2(\phi)$ permiten reescribir la expresión (1.17), como sigue:

$$\frac{\operatorname{sech}^2(\phi)d\phi}{\operatorname{sech}^2(\phi)} = -\frac{u}{c} \times \frac{dm}{m}.$$

La integración de la anterior expresión conduce a

$$\phi = -\frac{u}{c} \times \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)^{u/c}. \quad (1.19)$$

Expresamos ϕ como el inverso de la primera expresión (1.18),

$$\phi = \text{arc. tanh}(\beta) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)^{u/c}, \quad (1.20)$$

en la que hemos usando la segunda igualdad como una identidad para reescribir $\text{arc. tanh}(\beta)$.

La última igualdad (1.20) adopta ahora la forma

$$\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)^{2u/c}, \quad (1.21)$$

lo que conlleva a la expresión

$$v = c \frac{\left(\frac{m_0}{m}\right)^{2u/c} - 1}{\left(\frac{m_0}{m}\right)^{2u/c} + 1} = c \frac{1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{2u/c}}{1 + \left(\frac{m}{m_0}\right)^{2u/c}}, \quad (1.22)$$

donde $m = m(t)$ representa la masa en el instante de tiempo t . La expresión (1.22) se conoce como la ecuación del cohete relativista, que fue deducida en 1930 por el pionero de la aviación francesa, Robert Esnault-Pelterie (1881-1957), en su libro *La Astronáutica*. Esnault-Pelterie creía que la astronáutica era un tema lo suficientemente ambicioso y fascinante como para justificar un esfuerzo

coordinado de toda la humanidad con la esperanza de apartar al hombre de sus conflictos tradicionales [7].

Si los gases expulsados por el cohete tuviesen la velocidad de la luz $u = c$ (cohete fotónico), (1.22) implica que la velocidad del cohete estaría dada por

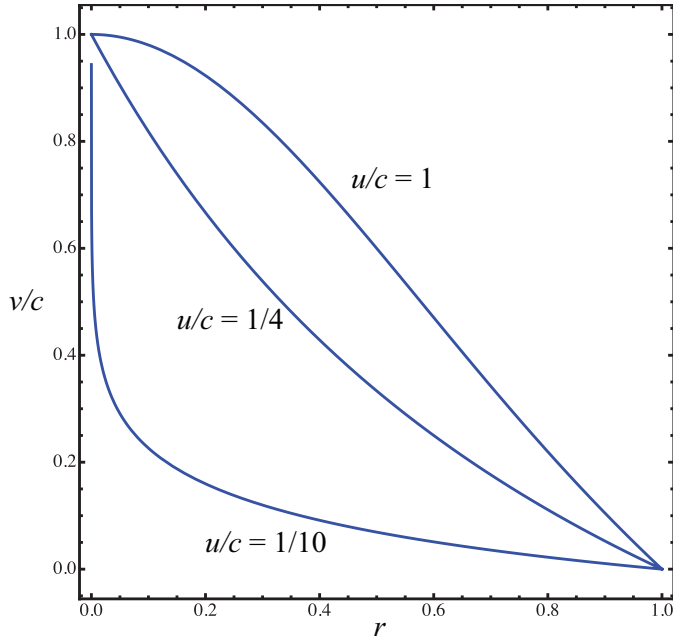


Figura 1.2. Relación v/c entre la velocidad del cohete y la velocidad de la luz en comparación con la razón $r(t) = m(t)/m_0$.

$$v = c \frac{1 - (m/m_0)^2}{1 + (m/m_0)^2}; \quad (1.23)$$

es decir, la velocidad $v(t)$ depende de la razón $r(t) = m(t)/m_0$ entre la masa residual $m(t)$ del cohete y la masa inicial m_0 . En la figura 1.2 se grafica la expresión (1.23) — $u/c = 1$ —y se compara con la ecuación (1.22) para los valores $u/c = 1/4$ y $u/c = 1/10$.

Ejemplo

Se quiere enviar una sonda no tripulada de 100 kg a un exoplaneta situado a 5 años luz de la Tierra. El combustible es materia-antimateria. La velocidad del crucero se fija en $\beta = v/c = 0.9$. ¿Cuánto combustible se requiere?

Debe tenerse en cuenta el combustible necesario para llevar el vehículo a la velocidad de crucero y para detenerlo al acercarse al exoplaneta. Por definición,² la velocidad de crucero es la velocidad que mantiene un vehículo terrestre, embarcación o aeronave durante la mayor parte de un determinado recorrido.

La expresión (1.22) permite expresar la masa inicial m_0 en la forma

² Diccionario de la lengua española.

$$m_0 = m(t) \left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \right)^{c/u}. \quad (1.24)$$

Consideramos el caso del cohete fotónico ($u/c = 1$) y asumimos para el vehículo la velocidad $v = 0.9c$. Denominando

1. $m_s = 100 \text{ kg}$ = masa final de la sonda
2. m_{fre} = masa del combustible requerido para el frenado
3. $m_0 = m_{\text{com i}} + m_s$ = masa inicial

De (1.24) se deduce la masa inicial requerida para que la nave llegue a la velocidad de crucero $u = c$,

$$m_0 = (m_s + m_{\text{fre}}) \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = (m_s + m_{\text{fre}}) \times 4.3589.$$

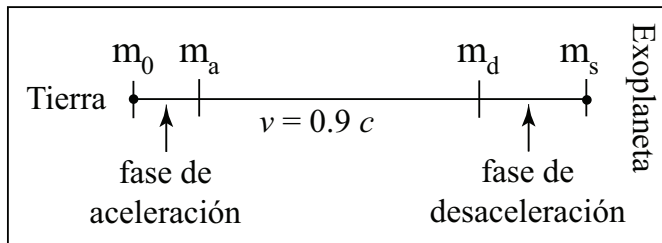


Figura 1.3. Etapas para ir de la Tierra a un exoplaneta.

Al iniciar el descenso al exoplaneta (figura 1.3), la masa inicial de la nave es $m_d = m_s + m_{\text{fre}}$, por lo que se cumple la relación

$$m_d = (m_s + m_{\text{fre}}) = m_s \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = 4.3589 m_s.$$

Al resolver esta ecuación, se obtiene $m_{\text{fre}} = 335.89$ kg. Usando la expresión para m_d , encontramos

$$m_d = (100 + 335.89) \times 4.3589 = 1900 \text{ kg.}$$

Bajo estas suposiciones, se necesitan 1800 kg de combustible para llevar la sonda de 100 kg al exoplaneta.

En el año 2015, la producción de antimateria en todos los aceleradores de partículas alcanzó 10^{-9} gramos, pero no existe un sistema que permita manejar la materia-antimateria en firme para que se produzca una emisión continua de radiación.

Viaje a los confines del Universo

La distancia de la Tierra a los límites del universo se estima en 13 000 millones de años luz. Si fuese posible controlar y utilizar la energía contenida en una galaxia, en un viaje con una aceleración

igual a la de la superficie de la Tierra sería posible alcanzar su límite en el transcurso de una vida.

Cuando la nave adquiere velocidad cercana a c , los efectos de dilatación del tiempo y de la contracción de longitud son significativos. Un observador en la Tierra calcula que la nave va a una velocidad muy superior a la de la luz, pues en un segundo se aleja varios ordenes de magnitud, superior a 300 000 km/s. Los tripulantes, por efecto de la contracción de Lorentz, calculan que la velocidad es inferior a c .

Esto permite comprender cómo Superman llega a la Tierra siendo un bebé, en un viaje de más de cinco años luz. No se rompe la más importante ley de la física, el principio de causalidad, y no hay inversión de la flecha del tiempo. El viaje intergaláctico se analiza en el espacio de Rindler, el cual requiere unos preliminares de relatividad especial.

1.4. Cuadrivectores

La no existencia de un tiempo absoluto, que sea común a los diferentes sistemas de referencia inerciales, conlleva a la necesidad de definir vectores de cuatro dimensiones. Un cuadrivector es un elemento de \mathbf{R}^4 , dotando a \mathbf{R}^4 con la métrica de Lorentz,

$$\begin{aligned}
 X &= (ct, x, y, z), \\
 X^2 &= c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2),
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

donde c es la velocidad de la luz, t el instante de tiempo en que sucede un evento (ct tiene dimensiones de longitud), las tres coordenadas espaciales (x, y, z) especifican el lugar donde ocurre el evento. Dados los cuadvectores

$$\begin{aligned}
 X_1 &= (ct_1, x_1, y_1, z_1), \\
 X_2 &= (ct_2, x_2, y_2, z_2),
 \end{aligned}
 \tag{1.26}$$

el producto escalar se define como

$$X_1 \cdot X_2 = c^2t_1t_2 - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \in \mathbf{R}.
 \tag{1.27}$$

La propiedad fundamental de un cuadvector X es la invariancia del producto escalar $X \cdot X$ en los diferentes sistemas de referencia inerciales; esta propiedad se asocia con la invariancia de la velocidad de la luz c .

Ejemplo

En la figura 1.4, el sistema de referencia inercial con origen A corresponde a un cohete que se desplaza con velocidad v relativa al punto de lanzamiento O . Sean

$$R = (ct, x, 0, 0), \quad R' = (c\tau, 0, 0, 0) \quad (1.28)$$

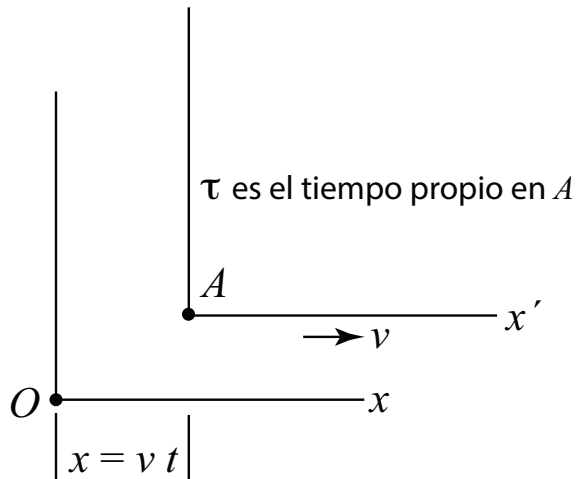


Figura 1.4. Dos sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo: el sistema con origen A se mueve con velocidad v en movimiento rectilíneo uniforme con respecto al sistema con origen O . Los orígenes coinciden en el tiempo $t = 0$.

los cuadvectores que describen la posición espacio-temporal en los sistemas O y A , respectivamente. Se tiene $R^2 = R.R = c^2t^2 - x^2$ y la propiedad de invariancia implica

$$c^2t^2 - x^2 = c^2\tau^2, \quad x = vt, \quad (1.29)$$

igualdad que conduce a la relación

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma(v)\tau, \quad (1.30)$$

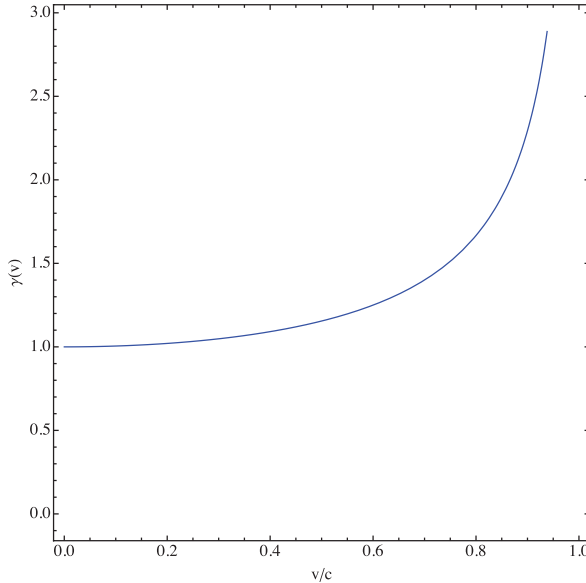


Figura 1.5. Comportamiento de $\gamma(v)$ como función de la relación v/c .

donde $\gamma(v)$ es el factor de Lorentz definido por la expresión (1.15). En (1.30), τ es el tiempo propio medido por el reloj móvil (sistema de referencia A) y t es el tiempo en el marco de referencia del reloj estacionario (sistema de referencia O).

El comportamiento de $\gamma(v)$ como función de la relación v/c se muestra en la figura 1.5: $\gamma(v)$ aumenta a medida que se incrementa v/c . La figura 1.5 y la ecuación (1.30) ponen de manifiesto la dilatación del tiempo que ocurre según la perspectiva del observador O en reposo ($t > \tau$), y en comparación con el tiempo τ que mide el observador A que se mueve inercialmente con velocidad v . Este resultado de la relatividad especial expresa que el observador O encuentra que su reloj (el que está en reposo en el sistema de referencia O) marca un tiempo t mayor que la marcación τ del reloj que se mueve con velocidad v .

Cuadrivector velocidad

Considérese el cuadrivector $R = (ct, x, y, z)$, con coordenadas espaciales x , y y z que en general son funciones del tiempo t . La relación (1.30) nos permite expresar R como función del tiempo τ y definir el cuadrivector velocidad en el sistema inercial móvil

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{dR}{d\tau} = \frac{dR}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(v) \frac{dR}{dt} \\
 &= \gamma(v) \left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \gamma(v)(c, \mathbf{u}), \quad (1.31)
 \end{aligned}$$

expresión que relaciona el cuadvivector velocidad en el sistema con origen A con el cuadvivector velocidad en el sistema con origen O . En la expresión anterior, el vector velocidad se expresa como la tripleta $\mathbf{u} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$.

Cuadvivector aceleración

Denomínese:

\mathbf{a} = cuadvivector aceleración con respecto al punto de lanzamiento, O ,

α = cuadvivector aceleración propio de la nave espacial, origen A .
A continuación, se demostrará que las longitudes de estos cuadvivectores se relacionan en la forma

$$\alpha = \gamma^3(v)a. \quad (1.32)$$

Si $a = |\mathbf{a}|$ es acotada, $\alpha = |\alpha|$ crece a medida que la velocidad de la nave aumenta; por no estar limitado $\gamma(v)$, tampoco lo está α .

Demostración de (1.32). A partir de (1.15) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(u) &= \frac{d\gamma(u)}{dt} = \frac{1}{c^2}\gamma^3(u) u(t)a(t), \\ \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}, \quad a = |\mathbf{a}(t)|,\end{aligned}\quad (1.33)$$

donde u designa la magnitud del vector velocidad \mathbf{u} .

A partir de (1.31), el cuadriector aceleración se define así:

$$\begin{aligned}A &= \frac{dU}{d\tau} = \frac{dU}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(u) \frac{dU}{dt} \\ &= \gamma(u) \frac{d}{dt} \left(\gamma(u)(c, \mathbf{u}) \right) \\ &= \gamma(u) \left(\frac{1}{c^2} \gamma^3(u) u(t)a(t)(c, \mathbf{u}) + \gamma(u)(0, \mathbf{a}(t)) \right).\end{aligned}\quad (1.34)$$

Se obtiene entonces

$$A^2 = \gamma^2 \left(\frac{1}{c^2} \gamma^6 u^2 a^2 - \frac{1}{c^4} \gamma^6 u^4 a^2 - \gamma^2 a^2 - 2\gamma^4 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^2 da \right), \quad (1.35)$$

que para el caso de movimiento paralelo, $\mathbf{u} \parallel \mathbf{a}$, se satisface $\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = au$. Con un poco de álgebra, se obtiene

$$A \cdot A = -\gamma^6 a^2. \quad (1.36)$$

Medido A^2 en el sistema del cohete, considerado como un sistema instantáneo en reposo, $u = 0$, $\gamma(u) = 0$, la aceleración instantánea es α , $A = (0, \alpha)$, de donde $-\alpha^2 = -\gamma^6 a^2$; es decir, se obtiene la expresión (1.32).

Velocidad del cohete

Considérese el movimiento unidimensional. Llamando $\alpha(\tau)$ la aceleración propia en el sistema de referencia del cohete en reposo instantáneo y a la aceleración derivada desde la plataforma de lanzamiento, se tiene $\alpha(\tau) = \gamma^3 a$.

El incremento de velocidad del cohete está dado por

$$\begin{aligned} d\sigma(\tau) &= \alpha(\tau)d\tau, \\ \sigma(\tau) &= \int_0^\tau \alpha(t')dt', \quad dt = \gamma d\tau = \gamma dt', \end{aligned} \quad (1.37)$$

con $\tau = t'$. Por lo tanto,

$$\sigma(\tau) = \int \gamma^3 a \gamma^{-1} dt = \int \gamma^2 a dt. \quad (1.38)$$

Como

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta c) = c \frac{d\beta}{dt}, \quad (1.39)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma(\tau) &= c \int \frac{d\beta}{1 - \beta^2} \\ &= c \operatorname{arc.tanh}(\beta) = c \operatorname{arc.tanh}\left(\frac{v}{c}\right),\end{aligned}\quad (1.40)$$

que se invierte para dar

$$\frac{v}{c} = \tanh\left(\frac{\sigma}{c}\right).\quad (1.41)$$

Ejemplo

Si la nave se desplaza a una velocidad $v = 0.9c$, se tiene una velocidad $\sigma = c \operatorname{arc.tanh}(0,9) = 1.47c$, velocidad propia de la nave. No se viola el principio de relatividad, a la velocidad $0.9c$, la contracción de Lorentz es $\sqrt{1 - (0.9)^2} = 0.4359 \approx 0.44$.

Otra forma de verlo es considerar la dilatación temporal a la velocidad $v = 0.9c$. Cuando en la Tierra transcurre un segundo, en la nave solo pasan 0.44 segundos; en un segundo, tiempo propio, recorrería el equivalente a $1.61c$, pero ese recorrido lo realiza en 2.27 segundos, tiempo en la Tierra.

En la película *Viaje a las estrellas*, cuando la nave *Enterprise* aumenta su velocidad a varios *warps* superando la velocidad de la luz, en realidad el efecto de contracción de Lorentz acerca el objetivo y puede alcanzarlo en un tiempo inferior a $\text{distancia}/c$. Un problema no resuelto es la comunicación con el comando central: por una parte, la señal puede tardar cientos o miles de años en llegar dependiendo de qué tan distante esté la galaxia; por otra parte, si bien el viaje para la tripulación puede durar unos pocos días, en la base transcurren cientos de años dependiendo del *warp* escogido. No hay forma de cumplir la misión en un período aceptable para el comandante principal de la base.

Puede pensarse en una comunicación que utilice la propiedad de entrelazamiento (*entanglement*). La base y la nave van equipados con partículas atómicas previamente entrelazadas, la nave (o la base) codifica una información alineada de un grupo de partículas, y la información es recibida en forma instantánea. La respuesta de la nave, empleando el mismo procedimiento, también llega de forma instantánea, pero quienes la reciben pueden ser los descendientes de quienes la enviaron.

La suposición de localidad no es válida en mecánica cuántica: dos objetos cuánticos distantes, aunque estén extremadamente alejados el uno del otro, a veces no se comportan de forma independiente; se dice que estos dos objetos cuánticos dependientes están enredados,

y este fenómeno se conoce como entrelazamiento cuántico (*quantum entanglement*). En 1981, se confirmó experimentalmente que la naturaleza ciertamente exhibe esta propiedad y, desde entonces, se ha avanzado significativamente en estudios y desarrollos tecnológicos, incluyendo la computación cuántica y la relación entre entrelazamiento e información cuántica.

1.5. Transformación espacio-tiempo de la nave acelerada

Introducimos el ángulo ϕ , expresamos (1.40) y (1.41) en la forma

$$\phi = \frac{\sigma}{c}, \quad \beta = \frac{v}{c} = \tanh(\phi) \quad (1.42)$$

y el factor de Lorentz (1.15) como sigue:

$$\begin{aligned} \gamma(v) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(\phi)}} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sech}(\phi)} = \cosh(\phi) \end{aligned} \quad (1.43)$$

De (1.30), se tiene la transformación $t = \gamma(v)\tau$, por lo que:

$$\begin{aligned}
 dt &= \gamma d\tau = \cosh(\phi) d\tau, \\
 dx &= v dt = c \tanh(\phi) dt \\
 &= c \tanh(\phi) \cosh(\phi) d\tau = c \sinh(\phi) d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Si la aceleración α es constante, $\sigma(\tau) = \alpha\tau$, entonces

$$dt = \cosh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) d\tau. \tag{1.45}$$

Integrando y teniendo en cuenta que si $t = 0$, entonces $\tau = 0$, resulta

$$t = \frac{c}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right). \tag{1.46}$$

Por otro lado, para la coordenada x se tiene:

$$\begin{aligned}
 dx &= c \sinh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) d\tau, \\
 x &= \frac{c^2}{\alpha} \cosh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) + k, \quad \text{si } \tau = 0, x = 0,
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

lo que conduce a la relación

$$x = \frac{c^2}{\alpha} \cosh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) - \frac{c^2}{\alpha}. \tag{1.48}$$

Un método diferente para obtener las ecuaciones de transformación espacio-tiempo de un objeto con aceleración constante se describe en [8].

Ejemplo

Ante el cataclismo que destruiría el planeta Krypton, Jor-El, padre biológico de Superman, decide enviar su hijo al planeta habitable más cercano, la Tierra, situada a 6 años luz. Para no someter al bebé a un viaje más largo ni a grandes aceleraciones y desaceleraciones, programó la nave para que tanto la aceleración como la desaceleración sea $4g$. Se va a calcular la duración del viaje y el combustible necesario.

Durante la mitad del trayecto, la nave es acelerada $\alpha = 4g$ —el bebé tiene una estructura ósea que le permite soportar esta aceleración—. Durante la segunda parte, la nave desacelera con magnitud igual, para llegar a la Tierra con velocidad cercana a cero.

El tiempo propio (Superman) para recorrer la mitad del trayecto es de 3 años luz = 2.84×10^{16} metros. Con $\alpha = 4 \times 9.81 = 39.24\text{m/seg}^2$. De la ecuación (1.48), se calcula

$$\tau = \frac{c}{\alpha} \text{arc.cosh} \left(\frac{\alpha x}{c^2} + 1 \right) \quad (1.49)$$

que conduce a

$$\tau = 25.12 \times 10^6 \text{ seg} = 0.796 \text{ años.} \quad (1.50)$$

La velocidad con respecto a Krypton se deduce de (1.42)

$$v = c\beta = c \tanh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) = 0.997c. \quad (1.51)$$

En Krypton ha transcurrido un tiempo que es dado por (1.46),

$$\begin{aligned} t &= \frac{c}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right). \\ &= 102.03 \times 10^6 \text{ seg} = 3.23 \text{ años.} \end{aligned} \quad (1.52)$$

El viaje total para Superman fue de 1.52 años.

Se asume que la nave llega a la Tierra con una masa total de 40 kilos, con todo el combustible agotado. Al iniciar la desaceleración, la masa se calcula con la ecuación (1.24),

$$m_0 = m_f \left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \right)^{c/u}, \quad u = c, \quad \beta = 0.997, \quad (1.53)$$

es decir, $m_0 = 1.032$ kilos. Se asume que el combustible es antimateria y que toda la materia se convierte en energía, así como

que la expulsión de la materia equivalente se hace a la velocidad de la luz ($u = c$). La masa inicial al enviar la nave sería de 27 toneladas.

Ni en la película ni en los comics se observa que Jor-El haya dispuesto en la nave dispositivos para cargar este inestable combustible, ni para controlar su conversión en energía.

Una nave acelerada a g puede pasar por la nebulosa de Andrómeda, situada a 2.5 millones de años luz, en un tiempo propio de 15 años, mientras que en la Tierra habrían transcurrido 2.6 millones de años.

A modo de comparación, la energía contenida en 27 toneladas de materia y antimateria equivale a 2.5×10^{22} joules. La energía total consumida en un año en la Tierra es $19\,000T_{\omega}h = 6.8 \times 10^{19}$ joules.

1.6. Satélites, GPS, relatividad

La red satelital GPS (*Global Positioning System*) es un sistema de navegación global por satélite (figura 1.6).³ Comprende 24 saté-

³ La figura 1.6 se generó con el simulador GPS: <http://demonstrations.wolfram.com/GPSSimulator/>, Wolfram Demonstrations Project, marzo 7 de 2011.

lites en seis planos orbitales centrados en la Tierra, cada uno con 4 satélites, con órbitas a una altitud de $h = 20\,000$ km y viajando a velocidades de 14 000 km/h (3 889 m/s). Los relojes atómicos de cada satélite garantizan que el sistema de tiempo está estrechamente sincronizado a través de los estándares de frecuencia de cesio y rubidio.

La cobertura comprende toda la superficie terrestre y para determinar la posición de un punto se utiliza la señal de cuatro satélites. Las principales fuentes de error en la determinación de las coordenadas son los cambios en la ionosfera y en la troposfera, la distancia multibandas y errores en el reloj satelital. Una fuente de error más significativo es consecuencia de la modificación de tiempo debido a la corrección relativista de velocidad y la diferencia gravitacional entre la superficie de la Tierra y la altitud del satélite.

Existen en pleno funcionamiento varios sistemas globales de navegación:⁴ el sistema americano NAVSTAR, el ruso GLONASS, el europeo GALILEO, el japonés QZSS y el chino Beidou-3. Este

⁴ Acrónimos: NAVSTAR, *NAVigation System Time and Ranging*; GLONASS, *Global Navigation Satellite System*; QZSS, *Quasi-Zenith Satellite System*. Nomenclatura: órbita terrestre media, MEO; órbita geosincrónica inclinada, IGSO; órbita geoestacionaria, GEO. Para información sobre el sistema Beidou-3 ver: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2021.05.002>. Satélites alrededor de la Tierra: <http://stuffin.space>.

último se completó en 2020 con el despliegue de una constelación de treinta satélites (24 MEO, 3 IGSO, 3 GEO).

El Sistema de Posicionamiento Global (GPS) utiliza relojes atómicos precisos en los satélites y en tierra para determinar la posición y la hora en todo el mundo. Para que el sistema funcione en for-

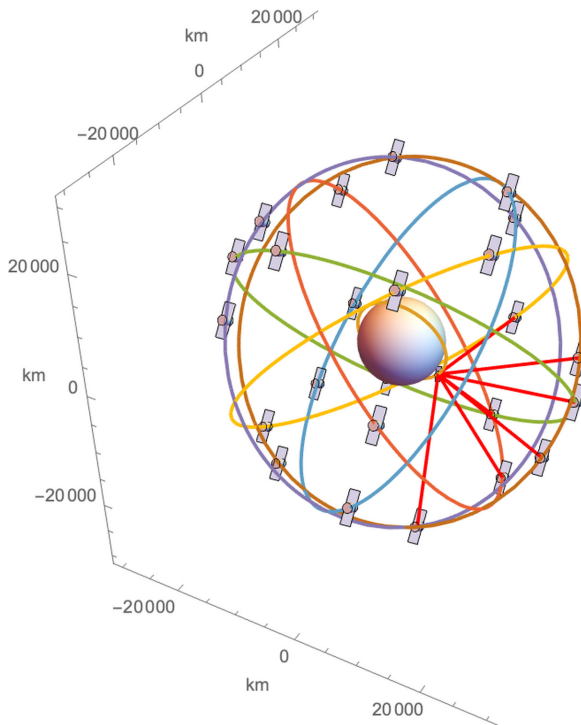


Figura 1.6. Visualización de un sistema GPS, el número de satélites visto desde un punto de la Tierra cambia con el tiempo. Fuente: simulador GPS, <http://demonstrations.wolfram.com/GPSSimulator/>.

ma adecuada se deben tener en cuenta los efectos relativistas: por una parte (relatividad especial), la velocidad del satélite hace que el tiempo medido en el satélite transcurra mas lentamente que el medido en la superficie terrestre, unos pocos microsegundos en un día. Por el otro (relatividad general), la masa terrestre y la diferencia de altitud del satélite con respecto al centro de la Tierra hacen que el tiempo en el satélite fluya mas rápidamente, unos pocos microsegundos en un día. Una ayuda para recordar en que sentido se modifica el tiempo es recurrir a la frase de Hawking:

En un vuelo de avión envejezco un poco más lento pero esos microsegundos no justifican tomar el horrible café que sirven en la Universidad. Prefiero que me sitúen este en un piso alto, si bien eso me hace envejecer un poco más rápido, nanosegundos, la vista justifica ese tiempo.

En los viajes interplanetarios no es necesario tomar en consideración las correcciones relativistas para ajustar la órbita. Las modificaciones tienen un orden de magnitud inferior a los errores con respecto a la diferencia de posición y velocidad, los cuales se van ajustando automáticamente o desde el centro espacial en la Tierra. No ocurre lo mismo con el sistema GPS, pues es necesario tener en cuenta la corrección relativista para ajustar los relojes atómicos de los satélites de la red.

Órbita circular de un satélite

En la aproximación de órbita circular, la velocidad promedio de un satélite GPS está dada por

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{\mu_T}{r}}, \quad r = R_T + h, \quad (1.54)$$

donde $R_T = 6\,378$ km es el radio de la Tierra, h es la altitud del satélite respecto a la superficie de la Tierra y, con la convención usual, $\mu_T = Gm_T = 398\,600$ km³/s² designa el producto de la constante de gravitación universal G por la masa de la Tierra, m_T . Con estos valores y $h = 20\,000$ km, se obtiene

$$R_T + h = 26\,578 \text{ km}, \quad \bar{V} = 3.87 \text{ km/s}. \quad (1.55)$$

Corrección debida a la relatividad especial

Considérese el dispositivo GPS y el satélite S que describe la órbita circular con velocidad \bar{V} . La fórmula (1.30) de dilatación del tiempo de la relatividad especial expresa

$$T_{\text{GPS}} = \frac{T_S}{\sqrt{1 - (\bar{V}/c)^2}}, \quad T_S = \sqrt{1 - (\bar{V}/c)^2} T_{\text{GPS}}. \quad (1.56)$$

Por ser $x = \bar{V}/c \ll 1$, es adecuada aproximación $\sqrt{1-x^2} \approx 1 - x^2/2$, la que permite estimar la corrección dada por el factor de Lorentz (1.15) como sigue:

$$T_S \approx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{V}}{c} \right)^2 \right] T_{\text{GPS}}. \quad (1.57)$$

Este resultado conduce a la expresión

$$T_S - T_{\text{GPS}} = \Delta_1 T_{\text{GPS}} \quad (1.58)$$

con la cantidad auxiliar

$$\Delta_1 \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{V}}{c} \right)^2. \quad (1.59)$$

Para el valor $\bar{V} = 3.87 \text{ km/s}$, se obtiene:

$$\Delta_1 = -8.3205 \times 10^{-11}.$$

Un reloj a bordo del satélite (o de una nave espacial), que viaja a la velocidad \bar{V} , avanza en forma lenta en comparación con un reloj estacionario (GPS) ubicado en la superficie terrestre, $\Delta_1 < 0$.

Como un día equivale a 86 400 segundos, la diferencia temporal diaria es de $8.3205 \times 10^{-11} \times 86\,400 = 7.2 \times 10^{-6}$ segundos. La señal se transmite a la velocidad de la luz, por lo cual el error

diario afectaría la corrección en la posición, que sería del orden de 2.15 km.

Corrección debida a la relatividad general

En la relatividad general, el espacio-tiempo no es plano dado que se curva debido a la presencia de masa y energía, lo que induce efectos adicionales en las mediciones del tiempo en un campo gravitatorio. En otras palabras, así como la relatividad especial genera una diferencia de tiempo $T_S - T_{\text{GPS}} = \Delta_1 T_{\text{GPS}}$, se espera que la relatividad general genere también una diferencia de tiempo y de distancia entre el satélite y el GPS.

Gracias a la métrica de Scharzchild, en relatividad general existe una fórmula que es análoga a la expresión (1.56), excepto que se origina en la deformación del espacio-tiempo debido a la presencia de un objeto masivo, como es la Tierra:

$$r = R_T + h,$$

$$T_{\text{GPS}} = \left(1 - \frac{2\mu_T}{R_T c^2}\right)^{+1/2} \left(1 - \frac{2\mu_T}{r c^2}\right)^{-1/2} T_S. \quad (1.60)$$

Esta fórmula relaciona el tiempo propio de dos partículas a distintas alturas, como es el caso de un satélite que órbita la Tierra y un GPS ubicado en la superficie terrestre. El radio del planeta es $R_T = 6371.0$ km y el producto de su masa por la constante gravitacional G toma el valor $\mu_T = Gm_T = 3.98443 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$. Para la velocidad de la luz, se tiene el valor de $c = 299\,792$ km/s.

Por comodidad introducimos las cantidades auxiliares

$$x = \frac{2\mu_T}{(R_T c^2)}, \quad y = \frac{2\mu_T}{(r c^2)} < x \quad (1.61)$$

donde $r = R_T + h$, donde h es la altitud del satélite. Expresamos la ecuación (1.60) como sigue:

$$T_{\text{GPS}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-y}} T_S.$$

Por analogía con la expresión (1.58), la diferencia de tiempo entre el satélite y el GPS se expresa así:

$$T_S - T_{\text{GPS}} = \left(1 - \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-y}}\right) T_S = \Delta_2 T_{\text{GPS}}, \quad (1.62)$$

con la cantidad auxiliar

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \left(1 - \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-y}}\right) \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-x}} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1-y}} \right] \sqrt{1-y}.\end{aligned}\quad (1.63)$$

Teniendo en cuenta que $x = \mu_T/(Rc^2) \ll 1$, se tiene

$$\begin{aligned}x &= \frac{2\mu_T}{R_T c^2} = 1.391709248 \times 10^{-9}, \\ \sqrt{1-x} &\approx 1 - \frac{1}{2}x = 0.9999999993,\end{aligned}\quad (1.64)$$

indicando que $\sqrt{1-x}$ es prácticamente equivalente a 1.

Hacemos uso de las siguientes aproximaciones: $(1-x)^{-1/2} \approx 1+x/2$, $(1-y)^{-1/2} \approx 1+y/2$, $(1-y)^{1/2} \approx 1-y/2$. En la ecuación (1.63), el factor $(1-y)^{1/2}$ cambia muy lentamente con la altitud, por lo que es válida la aproximación $(1-y)^{1/2} \approx 1$. En consecuencia, la ecuación (1.63) para Δ_2 se puede aproximar por la expresión:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1-y}} \\ &\approx \frac{\mu_T}{c^2} \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h} \right).\end{aligned}\quad (1.65)$$

Un reloj a bordo del satélite, ubicado a una altura h sobre la superficie terrestre, avanza más rápido en comparación con un reloj

estacionario (GPS) situado en la superficie terrestre, $\Delta_2 > 0$. El efecto acumulativo en la medida de la posición es aproximadamente de 13.7 km por día.

En un ejercicio teórico, queremos determinar una órbita circular en la cual los dos efectos se compensan:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{V}}{c} \right)^2 = \Delta_2 = \frac{\mu_T}{c^2} \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r} \right). \quad (1.66)$$

Teniendo en cuenta (1.54), los dos efectos son iguales si

$$r = \frac{3}{2} R_T, \quad h = r - R_T = 3\,189 \text{ km}, \quad (1.67)$$

es decir, el satélite debe estar a una altitud de 3 189 km sobre la superficie terrestre.

1.7. Métrica de Schwarzschild

La estructura anterior se basa en la métrica de Schwarzschild, de la ecuación de la relatividad general de Einstein para el caso de un campo gravitacional de un cuerpo masivo esféricamente simétrico, sin rotación. En rigor, no puede aplicarse a la deformación espacio-temporal de la Tierra, puesto que la Tierra rota y las ecuaciones

de Schwarzschild consideran el objeto esférico sin rotación. El elemento diferencial de la métrica está dado por

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right] \frac{1}{c^2}, \quad (1.68)$$

donde θ y ϕ tienen el significado que se les da en coordenadas esféricas, y

$$m = \frac{\mu_T}{c^2} = \frac{GM}{c^2}, \quad R_H = 2m = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1.69)$$

donde G es la constante gravitacional universal, c la velocidad de la luz, M la masa del cuerpo, R_H se denomina horizonte de sucesos o simplemente horizonte.

La expresión (1.68) describe una solución estática, en el vacío, con simétrica esférica. Si $m = 0$, se está en el terreno de la relatividad especial,

$$d\tau^2 = dt^2 - \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2(\theta) \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \right] \frac{dt^2}{c^2}. \quad (1.70)$$

La expresión entre corchetes [. . .] es la velocidad al cuadrado, v^2 —expresada en coordenadas esféricas, ortogonales—, por lo que (1.70) se reescribe en la forma

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{v^2}{c^2} dt^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2. \quad (1.71)$$

Este resultado permite recuperar la dilatación del tiempo de la ecuación de Lorentz,

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Delta\tau. \quad (1.72)$$

Si $v = 0$, un objeto estático en un campo gravitacional con simetría esférica (una oficina en un piso elevado de un laboratorio), se tiene

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - 2m/r}} \Delta\tau. \quad (1.73)$$

Combinando ambos efectos, teniendo en cuenta que para la Tierra

$$\frac{m}{r} = \frac{\mu_t}{rc^2} \ll 1,$$

llamamos t_T el tiempo en la Tierra y t_N el tiempo en la nave. Por razón de la simetría esférica, puede considerarse la órbita circular ecuatorial

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \phi = \frac{\pi}{2}, \quad (1.74)$$

de tal manera que ecuación (1.68) de la métrica se simplifica así:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{r^2}{c^2} d\phi^2 \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{v^2}{c^2} dt^2. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Aunque r no es igual a la distancia del centro de la Tierra a la órbita del satélite, debido a la curvatura del espacio, en el caso de la Tierra puede asumirse $r = R_T + h$.

Se quiere que el tiempo propio de la Tierra sea igual al tiempo propio del satélite,

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt_N^2 - \frac{v^2}{c^2} dt_N^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt_T^2. \quad (1.76)$$

Usando (1.69) para m y $v^2 = \mu_T/r$, se obtiene $r = 3R_T/2$, como se estableció en (1.67).

Comparación de los efectos relativistas

Según la relatividad especial, dos relojes que se mueven a velocidades diferentes marcan tiempos distintos; esto es lo que ocurre

al comparar el tiempo de un satélite en órbita con el tiempo medido sobre la superficie terrestre, ya que el satélite se mueve a mayor velocidad que un punto sobre la superficie terrestre. Similarmente, como el campo gravitacional es mayor en la superficie terrestre que a la altitud h , en la que se encuentra el satélite, el espacio-tiempo se curva en distinto grado. En la figura 1.7 se comparan los dos efectos y se muestra el efecto acumulado de las dos contribuciones. En otras palabras [9]:

Como los satélites se mueven rápidamente con respecto a los receptores de la Tierra, sus relojes van más lentos según la teoría especial de la relatividad. Pero como los satélites orbitan parcialmente fuera del campo gravitatorio de la Tierra, van más rápido según la teoría general de la relatividad. El efecto neto es ajustar los relojes de abordo para que funcionen unas 4.5×10^{-10} veces más rápido que si estuvieran en la superficie de la Tierra. Si los satélites estuvieran en órbitas muy elípticas, estos cálculos habrían sido más difíciles.

Como los ingenieros del sistema NAVSTAR conocían de antemano el impacto del efecto relativista de la dilatación del tiempo, instruyeron a los fabricantes de los relojes atómicos para que desplazaran a propósito los ritmos de tictac para compensar los efectos relativistas que sabían que se producirían cuando los satélites estuviesen en órbita. Sabían también que si las órbitas fuesen perfectamente

circulares, la compensación de los ritmos de tictac compensaría prácticamente toda la dilatación temporal relativista. Desafortunadamente, las órbitas de los satélites siempre serán ligeramente excéntricas.

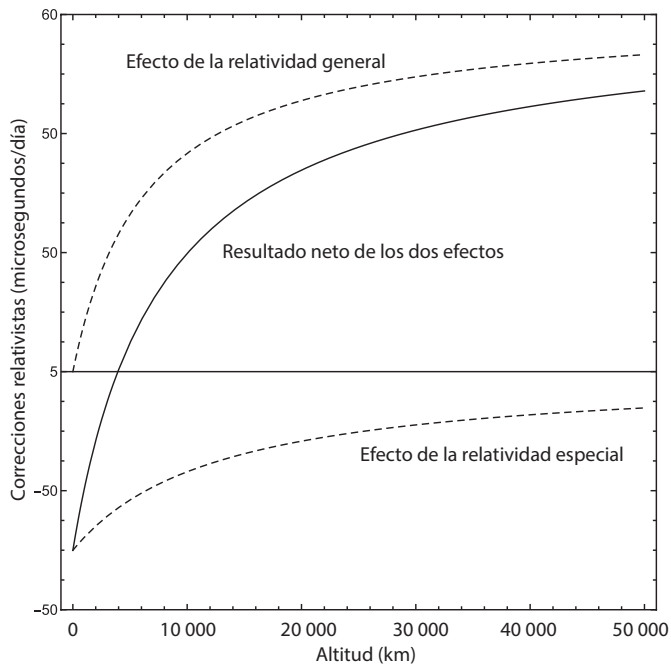


Figura 1.7. Comparación entre los efectos debidos a la relatividad especial y general en la dilatación temporal en el caso de un satélite en órbita terrestre y un GPS en la superficie de la Tierra [10]. Ver las ecuaciones (1.54), (1.58)-(1.59) y (1.62)-(1.65). Un día equivale a 8.64×10^{10} microsegundos.

1.8. Ciencia Ficción - Interestelar

La película de ciencia ficción más significativa en lo que va del siglo XXI es, sin lugar a duda, *Interstellar* (Interestelar en Hispanoamérica), dirigida por Christopher Nolan. En el año 2015, recibió el Oscar por los mejores efectos visuales.⁵ El director científico de la película fue Kip Thorne, quien en el 2017 recibió el premio Nobel de física por sus trabajos en ondas gravitacionales y por la colaboración en el diseño y puesta en marcha del Observatorio de detección de ondas gravitacionales por interferometría láser (LIGO, *Laser Interferometer Gravitational-waves Observatory*), el cual permitió detectar por primera vez una radiación de ondas gravitacionales en 2015. Esta noticia se dio a conocer al público el 11 de febrero de 2016, cien años después de que Albert Einstein predijera la existencia de ondas gravitacionales en 1916.⁶ Datos de ondas gravitacionales generadas por eventos que se produjeron hace casi mil millones de años, lejos de la Tierra, se registran en [12]: el primero (GW200105) es el resultado de la colisión de un agujero negro con una estrella de neutrones, mientras que el

⁵ *Interstellar* es la primera película de Hollywood que intenta representar un agujero negro tal y como lo vería alguien cercano. El equipo de trabajo desarrolló un código para resolver las ecuaciones de la propagación del haz de luz a través del espacio-tiempo curvo de un agujero negro giratorio y generar imágenes de calidad IMAX que cambian rápidamente [11].

⁶ <https://www.ligo.org/news/detection-press-release.pdf>.

segundo (GW200115) proviene de la fusión de un agujero negro con una estrella de neutrones.

La película se inicia en una zona del medio oeste de los Estados Unidos: el profundo centro, la zona del trigo y del maíz. Las cosechas se echaron a perder por la combinación de la sequía y el polvo, la cual no solo afecta a las plantas: también los habitantes tienen dificultad para respirar, los pulmones se van saturando de polvo, el cielo es gris, el paisaje es desolador, y el futuro es peor. Paradójicamente, cuando se produce un incendio en los campos, las llamas parecen aliviar un poco el angustiante panorama. Este armagedón, fin de los tiempos por catástrofes, es causado por el cambio climático, que hace inviable la vida en la Tierra. Una solución es colonizar otro planeta, pero en el sistema solar no hay ninguno que permita asentamientos humanos masivos, aunque a cientos de años luz pueden existir planetas que permitan ser colonizados. Llegar a ellos es imposible no solo por la cantidad de energía requerida, sino porque el tiempo para alcanzarlos supera miles de generaciones. Una solución, entre la ciencia ficción y la fantasía, es realizar el viaje a través de un agujero de gusano y llegar a planetas que puedan albergar los sobrevivientes del cataclismo.

La poesía describe mejor el escenario de la catástrofe ecológica:

Dicen que la ceniza⁷

Dicen que la ceniza es la nueva nieve
de las zonas más cálidas. La bahía
y la montaña se cubren de humo.
Los niños juegan en las calles grises,
aprenden a respirar de a poco, no quieren
que se vuelvan sólidos sus pulmones.

El fuego a lo lejos ilumina las calles.
Al ver este mundo puedo decir:
la mejor luz es la del incendio.
Siempre cálida. Siempre intermitente.

...

La modificación temporal creada por un campo gravitacional le inspiró a Nolan la idea de hacer envejecer los habitantes de la Tierra mientras una nave estaba en órbita del enorme agujero negro Gargantúa. La nave se posa unas pocas horas en el planeta Miller, candidato a albergar a la humanidad, cuando la Tierra fuese inhabitable. Por cada hora en el planeta Miller, en la Tierra pasan siete años. De esta forma, el recurso más escaso de la nave no es el combustible —lo cual, para los productores de ciencia ficción, no

⁷ Fragmento de Violeta González Santos, *La Tierra que nos falta*, Taller de Edición Rocca, 2021. Fuente: <https://palomavioleta.com/La-Tierra-que-nos-Falta>.

es la preocupación de mayor grado —, sino que es el tiempo lo que debe economizarse. Cuando el comandante Cooper se encuentra con su hija Murph, ella tiene 101 años y el padre tiene cincuenta.

Una deformación tan fuerte en el tiempo le plantea a Kip retos teóricos muy difíciles. Nolan advierte, no es negociable, que una hora es equivalente a siete años. Si la masa del agujero negro



Figura 1.8. El 10 de abril de 2019, el proyecto internacional de cooperación *Event Horizon Telescope* (ETH) presentó la primera imagen de un agujero negro supermasivo, que se encuentra en la galaxia M87. La imagen se construyó combinando las señales de ocho telescopios de todo el mundo. Fuente: <https://eventhorizontelescope.org/>.

(figura 1.8) es unas pocas veces la masa solar, el radio del horizonte R_H es de pocos kilómetros y el planeta Miller se destruye por las enormes fuerzas de marea (*tidal forces*) creadas por la diferencia gravitacional entre la cara más cercana y la más alejada del planeta.

Para disminuir la velocidad de la nave al acercarse al planeta, Kip recurre al efecto cauchera utilizando el paso por una estrella de neutrones. En el libro *The Science of Interstellar*, Kip Thorne describe las características de Gargantúa y el planeta Miller. Para lograr una órbita, en el cual la fuerza de marea no destruya el planeta, toma como masa de Gargantúa la correspondiente a 100 millones de soles. En su libro presenta los resultados, pero no detalla los cálculos. En el siguiente acápite se explica la forma como pueden deducirse.

La idea de establecer una colonia humana en un exoplaneta o en otra galaxia para evitar la desaparición de la especie es una posibilidad muy remota. Además no deben abundar los agujeros de gusano que permitan el viaje, por lo cual tiene más sentido que la humanidad modifique drásticamente su modelo de producción para evitar una, cada vez más cercana, catástrofe ambiental.

1.9. Solución de Schwarzschild

Un año después de la publicación de Einstein sobre relatividad general (1915), Karl Schwarzschild (1873 - 1916) aplicó las ecuaciones para el estudio de ciertos objetos extraños, a los que John A. Wheeler bautizó en 1967 como agujeros negros (*black holes*)⁸. Se parte de la solución de Schwarzschild (1.68)-(1.69),

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2(\theta) \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \right] \frac{dt^2}{c^2}, \quad (1.77)$$

donde G es la constante de gravitación universal y M se interpreta como la masa aparente del objeto, estrella o planeta que crea el campo.

El radio del horizonte está dado por

$$R_H = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1.78)$$

donde M es la única variable que el director científico de Interestelar puede controlar. Tomando

⁸ Schnittman J. (2019), A brief history of Black holes. <https://astronomy.com/magazine/2019/08/a-brief-history-of-black-holes>.

$$M = 100 \times 10^6 \times M_{\text{Sol}} = 10^8 \times 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

se obtiene $R_{\text{H}} = 295$ millones de kilómetros. Este resultado es sencillamente igual al diámetro medio de la órbita Tierra-Sol. Con un agujero negro de masa cincuenta millones de veces la masa del Sol, $R_{\text{H}} \approx$ radio medio de la órbita Tierra-Sol.

Se define β como el factor de expansión del tiempo

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\text{tiempo que transcurre en la Tierra}}{\text{tiempo que transcurre en el planeta Miller}} \\ &= \frac{7 \times 365.25 \times 24 \text{ horas}}{1 \text{ hora}} = 61\,362. \end{aligned} \quad (1.79)$$

$$R_{\text{H}} = \frac{2GM}{c^2}$$

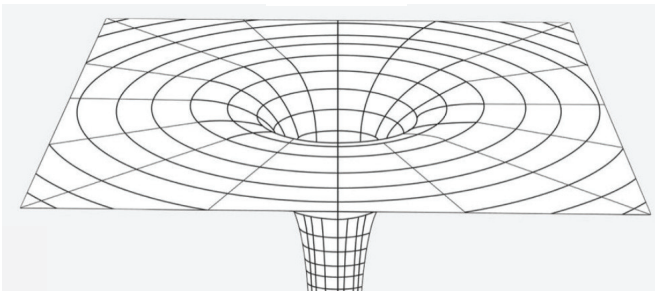


Figura 1.9. El radio Schwarzschild (R_{H}) define el horizonte de sucesos de un agujero negro. Fuente: <http://cienciaoficcion.com/la-fisica-de-interstellar-ii-el-planeta-de-miller/>.

Considérese el planeta Miller que orbita el agujero negro Gargantúa de la película *Interestelar*; su período orbital es de 1.7 horas y constituye el primer planeta que visita la tripulación de la nave *Endurance* después de su viaje a través del agujero de gusano.⁹ La órbita del planeta es estable debido a la gran velocidad de rotación de Gargantúa (garantizado por Kip Thorne), lo que permite que exista una órbita estable justo fuera del horizonte de sucesos del agujero negro.

Llamando t el tiempo en la Tierra y τ el tiempo en el planeta Miller, la métrica generada por el agujero negro, que por simplificación se asume que no rota, es dada por (1.77). En esta aproximación, el planeta describe una órbita circular equatorial con relación a la esfera de radio R_H ,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \sin(\theta) = 1, \quad r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = V^2,$$

$$dt = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-1/2} d\tau,$$

anotando que la distancia r es solo una coordenada diferente de la distancia física del radio R_H asociado con el horizonte de sucesos

⁹ Un agujero de gusano es una estructura hipotética del espacio-tiempo que se concibe como un túnel que conecta puntos separados en el espacio y el tiempo, lo que permitiría crear atajos para realizar largos viajes a través del universo.

del agujero negro. A partir de las relaciones

$$v = \frac{GM}{r},$$

$$1 - \frac{2GM}{rc^2} \frac{V^2}{c^2} = 1 - \frac{3GM}{rc^2},$$

se obtiene

$$1 - \frac{3GM}{rc^2} = \frac{1}{\beta^2}.$$

Por lo tanto, el radio $r = R_M$ de la órbita del planeta Miller (figura 1.10) está dado por

$$r = \frac{3GM}{c^2} \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} = \frac{3}{2} R_H \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} > \frac{3}{2} R_H, \quad (1.80)$$

donde la desigualdad surge de la aproximación $\beta^2 - 1 \approx \beta^2$. El resultado (1.80) es compatible con la restricción que se deduce de la métrica. Solo hay órbitas circulares estables si $r > (3/2)R_H$.

La velocidad orbital del planeta es

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{(3/2)R_H}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{GMc^2}{2GM} = c\sqrt{\frac{1}{3}} < c. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Haciendo $dt = 0$, $dV = 0$, se obtiene:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 = dR^2.$$

La distancia espacial entre las coordenadas r_1 y r_2 está dada por:

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2} dr.$$

Recordando que $GM/c^2 = m$, expresamos la ecuación anterior en la forma:

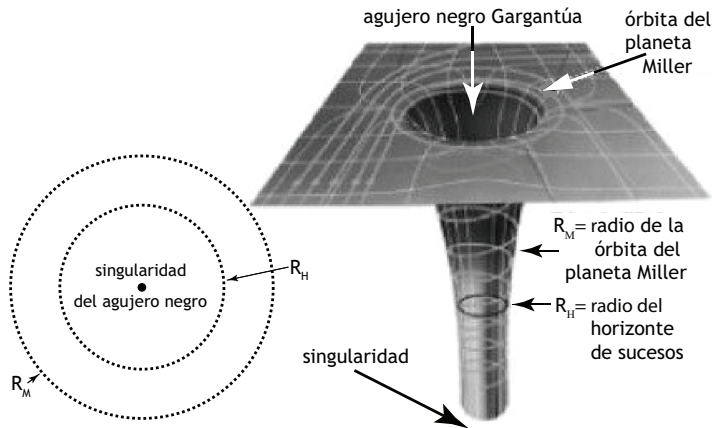


Figura 1.10. Descripción de un agujero negro en una geometría espacio-tiempo: toda la materia del agujero negro está situada en el centro de la curvatura del espacio-tiempo. Fuente: http://adamapollo.info/projects_and_physics/theory/.

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} dr = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{r}{r-2m}\right)^{1/2} dr.$$

Para resolver la integral, se hace un cambio en la variable de integración

$$\begin{aligned} u &= \frac{r}{r-2m}, & r &= \frac{2mu}{u-1}, \\ dr &= -\frac{2m}{(u-1)^2} du. \end{aligned} \quad (1.82)$$

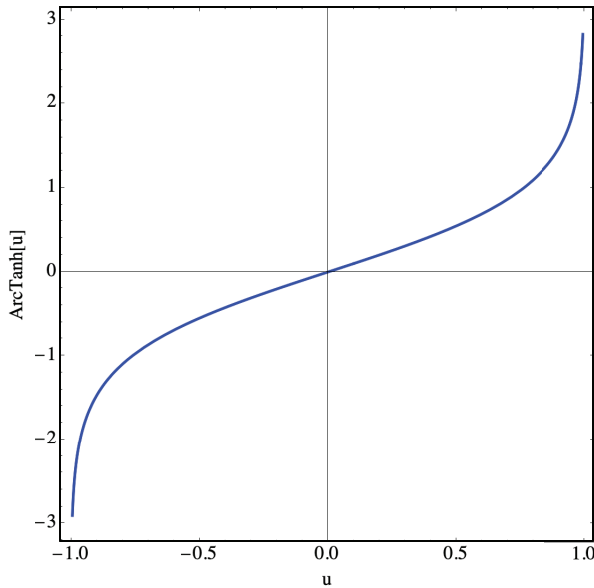


Figura 1.11. Comportamiento de la tangente hiperbólica inversa, $\text{ArcTanh}(u)$.

Se tiene entonces la expresión

$$\begin{aligned}
 R(r_1, r_2) &= \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{r}{r-2m} \right)^{1/2} dr \\
 &= -2m \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^{1/2}}{(u-1)^2} du = 2m \left[\frac{\sqrt{u}}{u-1} + \text{ArcTanh}(\sqrt{u}) \right]_{u=u_1}^{u_2}
 \end{aligned}$$

que, en forma explícita, adopta la forma

$$\begin{aligned}
 R(r_1, r_2) &= 2m \left[\frac{\sqrt{u_2}}{u_2-1} - \frac{\sqrt{u_1}}{u_1-1} \right. \\
 &\quad \left. + \text{ArcTanh}(\sqrt{u_2}) - \text{ArcTanh}(\sqrt{u_1}) \right]. \quad (1.83)
 \end{aligned}$$

En la expresión (1.83), $\text{ArcTanh}(u)$ designa el valor principal de la tangente hiperbólica inversa (figura 1.11), que se define por la expresión:

$$\begin{aligned}
 \text{ArcTanh}(u) &= \frac{1}{2} [\ln(1+u) - \ln(1-u)] \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right). \quad (1.84)
 \end{aligned}$$

Esta función se denota en la literatura de varias formas, por ejemplo: $\text{arctanh}(u)$ o $\tanh^{-1}(u)$, donde el supraíndice -1 designa la

función inversa, no el inverso multiplicativo.¹⁰ La derivada cumple la relación

$$\frac{d\text{ArcTanh}(u)}{du} = \frac{1}{1-u^2}. \quad (1.85)$$

La primera expresión (1.82) establece la relación de u_1 y u_2 con r_1 y r_2 , respectivamente. Asimismo, la función $\text{ArcTanh}(u)$ puede reescribirse en términos del logaritmo (1.84). De esta manera, la ecuación (1.83) adopta la siguiente forma:

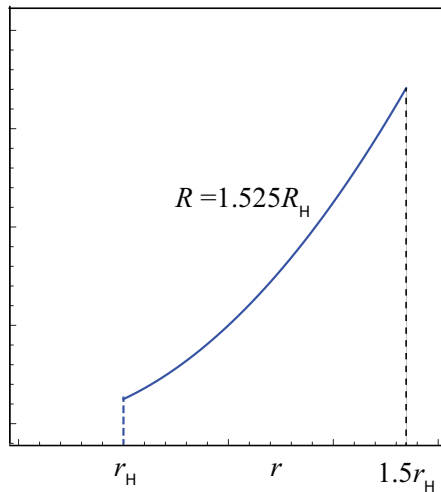


Figura 1.12. El caso del planeta Miller en órbita alrededor de Gargantúa.

¹⁰ <https://mathworld.wolfram.com/InverseHyperbolicTangent.html>.

$$R(r_1, r_2) = \left[\sqrt{r_2(r_2 - 2m)} - \sqrt{r_1(r_1 - 2m)} \right. \\ \left. + m \log \left(\frac{\sqrt{r_2 - 2m} + \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_2 - 2m} - \sqrt{r_2}} \right) - m \log \left(\frac{\sqrt{r_1 - 2m} + \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1 - 2m} - \sqrt{r_1}} \right) \right]. \quad (1.86)$$

En el caso del planeta Miller (figura 1.12), en órbita alrededor de Gargantúa, la distancia del planeta al horizonte del agujero negro se obtiene evaluando (1.86) para los valores

$$r_H = 2m = \frac{2GM}{c^2}, \quad r = 3m - \frac{3GM}{c^2}, \quad (1.87)$$

lo que conduce a

$$R = 3.05m = 1.525r_H. \quad (1.88)$$

Referencias

- [1] Weiterkamp M. A. “Ahead, warp factor three, Mr. Sulu”: Imaging Interstellar faster-than-light Travel in space science fiction. *The Journal of Popular Culture*, 52(5):1036–1057, 2019. <https://doi.org/10.1111/jpcu.12844>.

- [2] Weiterkamp M. A. Imagining faster-than-light travel. *The Journal of Popular Culture*, 52:1036–1057, 2019. <https://tinyurl.com/4yf7w7v6>.
- [3] Thorne K. *The science of Interstellar*. W. W. Norton & Company, 2014.
- [4] Wiesel W. *Spaceflight Dynamics*. Sphelion Press, third edition, 2010.
- [5] Isaza J. F. and Campos D. *Física de los vuelos espaciales*. Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, 2021. ISBN 978-958-725-296-5.
- [6] Bruce A. L. A general quadrature solution for relativistic, non-relativistic, and weakly-relativistic rocket equations. *arXiv: Space Physics*, 2015. <https://arxiv.org/pdf/1504.07205.pdf>.
- [7] Contensou P. The contributions of Robert Esnault-Pelterie. *Acta Astronautica*, 10(11):743–745, 1983. [https://doi.org/10.1016/0094-5765\(83\)90099-1](https://doi.org/10.1016/0094-5765(83)90099-1).
- [8] Tejeiro J.M. *Sobre la teoría especial de la relatividad*. Universidad Nacional de Colombia, 2002.
- [9] Ceruzzi P. E. *GPS*. The MIT Press, 2018.
- [10] Quirantes A. *Espacio Tiempo Cuántico*. Rodesa Villatuerta (Navarra), 2015.

- [11] James O., von Tunzelmann E., Franklin P., and Thorne K. S. Gravitational lensing by spinning black holes in astrophysics, and in the movie *Interstellar*. *Classical and Quantum Gravity*, 32:065001, 2015. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/6/065001>.
- [12] Abbott R., Abbott T. D., Abraham S., and *et al.* Observation of gravitational waves from two neutron star–black hole coalescences. *The Astrophysical Journal. Letters*, 915:1–24, July 1 2021. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac082e>.
- [13] Walter U. *Astronautics*. Springer, third edition edition, 2018.
- [14] Rindler W. *Relativity*. Oxford University Press, 2006.
- [15] Moses F. *Special Relativity and How it Works*. Wiley, 2008.
- [16] Foster J. and Nightingale J. D. *A Short Course in General Relativity*. Springer Verlag, second edition edition, 1995.



Este libro se terminó de editar
en la Editorial UTADAO
en el mes de agosto de 2021.

Diógenes Campos Romero

Físico y Magister de la Universidad Nacional de Colombia, y doctor en Ciencias Naturales (Dr.rer.nat.) de la Universidad de Kaiserslautern, Alemania. Es profesor emérito de la Universidad Nacional de Colombia y miembro de número de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

En la Universidad Nacional de Colombia alcanzó la categoría de profesor titular y maestro universitario, y recibió la distinción de Docencia Excepcional y la medalla al mérito universitario en investigación. Estableció el grupo de investigación Caos y Complejidad (1995) y ejerció como Director de la Dirección Nacional de Investigación (DINAIN) de la Universidad Nacional de Colombia (1998-2000). Fue decano y vicerrector académico de la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano y vicerrector académico de la Universidad La Gran Colombia.

Formó parte del consejo del Programa Nacional de Ciencias Básicas (2006-2011) y ha ejercido como par académico (1997-2020) designado por el Consejo Nacional de Acreditación en unas dieciocho oportunidades.

Es autor y coautor de libros y artículos científicos en las áreas de física teórica, sistemas cuánticos, mecánica estadística, mecánica analítica, sistemas dinámicos, biodiversidad, ecología, cambio climático y física de vuelos espaciales.

Esta obra entrelaza ciencia, realizaciones tecnológicas y ciencia ficción. Películas de ciencia ficción –como *Viaje a la Luna*, *Interstellar*, *Viaje a las estrellas*– despertaron la imaginación de lectores que posteriormente se convirtieron en los pioneros de los vuelos espaciales y contribuyeron al desarrollo de la ciencia y la tecnología.

La ciencia moderna incorpora teorías que trascienden el sentido común para interpretar los fenómenos y el universo a la luz de nuevas perspectivas, las cuales se fundamentan en la relatividad de Einstein (especial y general), en la mecánica cuántica y en otras componentes de la ciencia contemporánea. Conceptos como gravedad, espacio-tiempo, dilatación del tiempo, contracción de longitud, agujeros negros, ondas gravitacionales, agujero de gusano, entrelazamiento cuántico son elementos distantes del modelo newtoniano del universo. Relatos míticos –como Ícaro, el profeta Elías, Enoc, la ascensión de Jesús– podrían interpretarse a la luz de nuevas perspectivas.

Los avances tecnológicos han sido significativos. La humanidad cuenta hoy en día con Sistemas de Posicionamiento Global (GPS), dispone de la capacidad de modificar la velocidad heliocéntrica de una nave espacial mediante una ayuda gravitacional planetaria (*flyby o swingby*), al igual que con la posibilidad de realizar correcciones de trayectoria mediante sistemas como el de propulsión eléctrica. Sistemas robóticos han visitado y traído muestras de asteroides, preparando el camino para la futura minería espacial. Los sistemas *Perseverance Rover*, *Tianwen-1* y *Hope Mar*, lanzados en 2020, se encuentran explorando el planeta Marte.

Esta publicación busca divulgar el impacto de la ciencia en el desarrollo tecnológico espacial, y la relación con el área de la literatura y el cine.