Adelina Ocaña Gómez y Mario Pérez Ruiz

PRECÁLCULO

CON APLICACIONES A LAS FUNCIONES

EDITORIAL UTADEO

Adelina Ocaña Gómez y Mario Pérez Ruiz

PRECÁLCULO

CON APLICACIONES A LAS FUNCIONES

EDITORIAL UTADEO

Ocaña Gómez, Adelina
Precálculo : con aplicaciones a las funciones / Adelina Ocaña Gómez, Mario Pérez Ruiz. - Bogotá: Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, 2024.

264 páginas; 21,59 x 27,94 cm.

ISBN: 978-958-725-361-0

1. Precálculo - Aplicaciones. 2. Funciones matemáticas. 3. Matemáticas. 4. Logaritmos. I. Pérez Ruiz, Mario, autor. II. Tít.

CDD 515.24

Fundación Universidad de Bogotá
Jorge Tadeo Lozano
Carrera 4 n.º 22-61 Bogotá, D.C., Colombia
PBX: 2427030 – www.utadeo.edu.co

Hecho el depósito legal que establece la ley
ISBN impreso: 978-958-725-361-0
ISBN digital: 978-958-725-362-7
DOI: https://doi.org/10.21789/9789587253610
Primera edición, 2024

EDICIÓN

Adelina Ocaña Gómez
Revisión de contenidos

Sylvana Blanco Estrada
Diseño de portada

Rolf Hecken en Unsplash
Fotografía de portada

Denise Rodríguez
Diagramación

DGP Editores
Impresión

En nombre de la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano le agradecemos a usted, el lector de esta obra, por apoyar el trabajo de todas las personas que hacen posible que el conocimiento llegue a sus manos al adquirir este texto de manera legal, así como el interés por el conocimiento que producen nuestros investigadores, y el apoyo que pueda darnos para que éste tenga un mayor alcance.

Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano | Vigilada Mineducación. Reconocimiento de personería jurídica: Resolución No. 2613 de 14 de agosto de 1959, Minjusticia. Acreditación institucional de alta calidad, 6 años: Resolución 4624 del 21 de marzo de 2018, Mineducación.

Impreso en Colombia - *Printed in Colombia*

PRESENTACIÓN

Precálculo con aplicaciones a las funciones es un texto de matemáticas que aborda temas que usualmente se incluyen en los libros de *Precálculo*. En el libro se busca no solo hacer del lenguaje matemático básico una herramienta útil en muchas profesiones, sino también una vía efectiva para cursos posteriores como *Cálculo*. Cada *función* en el libro tiene aplicaciones en diversas áreas a partir de modelos matemáticos existentes o a partir de modelos creados por las condiciones de cada problema.

El libro se divide en tres unidades con sus respectivas secciones. En la primera unidad se hace un recorrido detallado sobre aspectos generales de las funciones: la función lineal, las funciones a trozos, las transformaciones, las operaciones y la composición de funciones. En la segunda unidad se presenta el estudio de las funciones cuadráticas, polinomiales y racionales. En la tercera unidad están las funciones exponenciales y logarítmicas. En algunas secciones hay una situación inicial que plantea la necesidad del estudio de los contenidos de la sección y de la unidad, y posteriormente se describen de manera breve los contenidos con el apoyo de ejemplos, gráficas y actividades que pueden ser discutidas por los estudiantes. Finalmente, se proponen ejercicios y problemas en contexto que permitan afianzar los contenidos, hacer conjeturas, y generar discusión en la clase.

El libro busca facilitar el acceso a otros textos matemáticos cuyo lenguaje es más formal. Para lograrlo, se presentan los contenidos en párrafos cortos y con lenguaje claro y sencillo que facilite un encuentro inicial o un reencuentro con las matemáticas. Cada sección cuenta con varios ejemplos cuya solución es detallada y explicada, imágenes y gráficas que permiten un acercamiento más claro a los diferentes contenidos tratados en las secciones, y una serie de ejercicios o problemas propuestos que permitan afianzar los temas tratados mientras se desarrollan destrezas operativas.

Un aspecto al que se quiere dar énfasis a lo largo de las tres unidades es el uso de la *tecnología* que facilita la representación gráfica de las diferentes funciones que se estudian, y que agiliza los cálculos; de esta manera se centra la atención en la interpretación y análisis de los diferentes aspectos que se estudian en cada función.

CONTENIDO

UNIDAD

1

1.1. Generalidades de la función

Actividad inicial

Escape de agua

El goteo permanente de una llave, un escape en la cisterna de un baño, genera pérdida de agua.

✍ Describa un procedimiento para estimar la cantidad de agua que se pierde debido a una llave que gotea.

✍ ¿Cómo calcularía el correspondiente costo en dinero?

Se recoge el agua que gotea de una llave en un recipiente con una capacidad de trece litros el cual contiene inicialmente tres litros de agua; se observa que cada hora se recogen dos litros de agua.

✍ Añada una pregunta a la situación anterior que la convierta en un problema.

✍ Complete los valores de volumen de agua en el recipiente correspondientes a los valores de tiempo indicados en la tabla 1:

Tiempo (*t*) (horas)	0	1	2		3.5	4.2	
Volumen (*V*) (litros)				9			13

✍ ¿Qué interpretación le da al último renglón de la tabla?

Situación 1

Cecilia, María, Édgar y Carlos son jóvenes que ingresan a trabajar a una empresa. Alguna información relacionada con ellos se encuentra en las figuras 1, 2 y 3 por medio de las correspondencias *f*, *g* y *h*, donde:

f indica las edades, en años.
g indica a quién envía correo después de la reunión.
h indica las actividades que realizan.

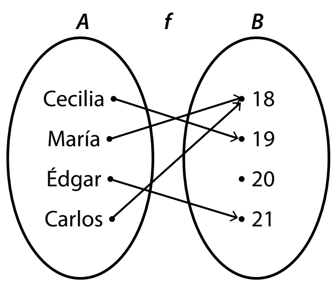


Figura 1

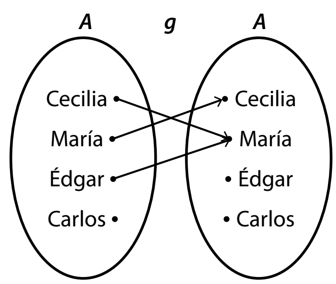


Figura 2

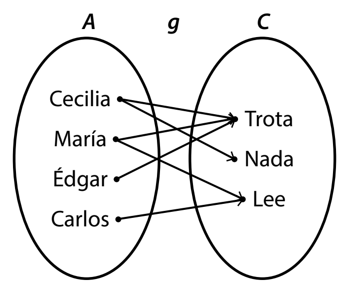


Figura 3

De los **diagramas de flechas** de las figuras 1, 2 y 3 observamos que Cecilia, por ejemplo, tiene 19 años, le envió un correo a María, le gusta ir a nadar y trotar. En el lenguaje de las correspondencias decimos que en la correspondencia *f*, a Cecilia le corresponde el 19 (o que la **imagen** de Cecilia por la correspondencia *f* es 19); en *g*, a Cecilia le corresponde María y en *h*, a Cecilia le corresponde nadar y trotar.

Las correspondencias que estudiaremos en este curso son del tipo que se define a continuación.

> Una correspondencia *f* de un conjunto *A* en un conjunto *B* que asigna a cada elemento de *A* un *único elemento* de *B* es una ***función***.

De las correspondencias entre los conjuntos de las figuras 1, 2 y 3 tenemos que:

f es función de *A* en *B* pues a cada elemento de *A* le corresponde un solo elemento de *B*.
g no es función de *A* en *A* porque a Carlos no le corresponde algún elemento en *A*.
h no es función de *A* en *C* pues a Cecilia le corresponde más de un elemento en *C*.

✍ ¿Cuáles de las correspondencias señaladas en las figuras 4, 5, 6 y 7 son funciones de *D* en *E*?

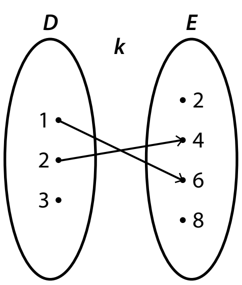


Figura 4

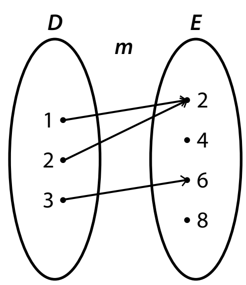


Figura 5

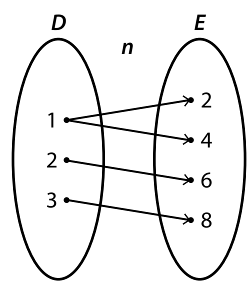


Figura 6

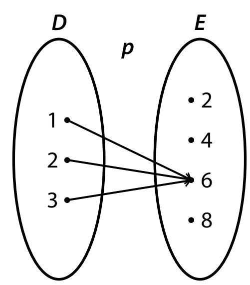


Figura 7

Cuando una correspondencia es función, como en el caso de *f*, figura 1, se usa también una representación llamada **notación funcional**. Por ejemplo, para representar con notación funcional que a Cecilia le corresponde el número 19, lo hacemos así:

$$f(\text{Cecilia}) = 19$$

Leemos lo anterior:

f de Cecilia *es igual a* 19

Observemos también con respecto a *f* que de todos los elementos de *A* salen flechas (como era de esperarse pues por ser *f* una función, a cada elemento de *A* le tiene que corresponder algún elemento de *B*) y que no llegan flechas a todos los elementos de *B* (o que no todos los elementos de *B* son imagen de algún elemento de *A*). A continuación se hace distinción de los conjuntos formados por los elementos mencionados:

> *Sea f una función de A en B. El conjunto A es el* ***dominio*** de *f*, *el conjunto B* es el ***codominio*** de *f* y el subconjunto de *B* formado por los elementos que son imágenes es el ***rango*** de *f*.
>
> Las abreviaturas ***dom f***, **codom *f*** y **rango *f*** serán usadas para esos conjuntos, respectivamente.

Ejemplo 1

Para la función *f* de la figura 1 determine dominio, codominio y rango.

Solución:

$dom\ f = A = \{\text{Cecilia, María, Édgar, Carlos}\}$

$codom\ f = B = \{18, 19, 20, 21\}$

$rango\ f = B = \{18, 19, 21\}$

✍ Una función *m* entre los conjuntos $D = \{1, 2, 3\}$ y $E = \{2, 4, 6, 8\}$ está definida así:

$$m(1) = 4, m(2) = 4, m(3) = 4,$$

Haga el diagrama de flechas de *m* y determine su dominio y rango.

Consideremos la función r de la figura 8:

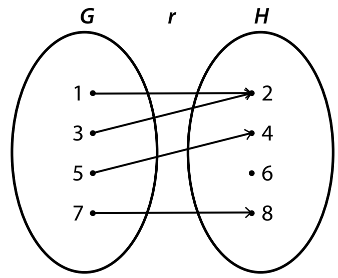


Figura 8

Para esta función tenemos que $r(1) = 2$. La notación funcional la entendemos mejor si comparamos la función con una *máquina* (figura 9): al introducir el 1 (*input* o *entrada*) en la máquina, esta lo procesa y lo convierte en 2 (*output* o *salida*).

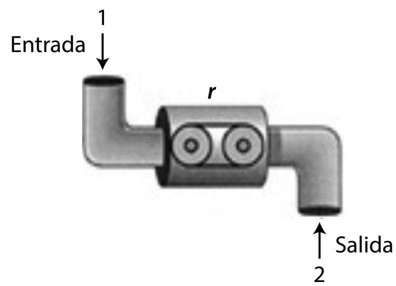


Figura 9

En $r(1) = 2$, imaginemos que r es el nombre de la máquina, el paréntesis es el cuerpo de la máquina en la cual *entra* el número 1, y el 2 que está después del igual es el número que *sale* de la máquina.

En esta comparación de una función con una máquina, los elementos del dominio de la función son los objetos que se permite entrar en la máquina, aquellos para los cuales estas se construyen, y los elementos del rango son los objetos que produce la máquina.

1.1.1 Formas de representar o describir una función

Como las funciones que encontraremos a lo largo del curso involucran conjuntos infinitos, la manera de definirlas por medio de diagramas de flechas ya no es apropiada. Habrá entonces que utilizar una regla (usualmente una expresión algebraica) que indique cómo establecer la correspondencia entre los conjuntos.

Retomemos la situación inicial para ilustrar lo mencionado anteriormente y otros aspectos generales relacionados con las funciones. El tiempo que va transcurriendo desde que se abre la llave es un ejemplo de una cantidad *variable*:

Una ***variable*** es una letra que representa cualquier elemento de un conjunto.

Utilizaremos la letra t para la variable tiempo. Como el tiempo de llenado del recipiente es de 5 horas, t toma valores en el conjunto de los números comprendidos entre 0 y 5, incluidos el 0 y el 5, el cual es un conjunto infinito; este conjunto es el *intervalo cerrado* de extremos 0 y 5: $[0, 5]$.

El volumen V de agua que va quedando en el recipiente también es una variable.

✍ ¿En qué conjunto toma valores la variable V?

Como inicialmente había 3 litros de agua en el recipiente y ya que cada hora ingresan 2 litros constantemente, las variables t y V las podemos relacionar con la fórmula:

$$V = 2t + 3$$

En esta fórmula, a cada valor del tiempo le corresponde un único valor del volumen; por tanto, consideramos a la variable V como una función de la variable t.

A la variable t se le llama la **variable independiente** pues se le puede asignar cualquier valor del dominio (el intervalo $[0, 5]$). La variable V se llama la **variable dependiente**; el valor que toma depende de t ya que el volumen en el recipiente depende del tiempo transcurrido.

El nombre que usualmente damos a la función es el mismo que el de la variable dependiente. Así, llamamos V a esta función. Con notación funcional escribimos:

$$V(t) = 2t + 3,\ t \in [0, 5]$$

Los valores que toma V para valores particulares de t, se llaman **valores funcionales**; por ejemplo:

para $t = 1$, $V(1) = 2(1) + 3 = 5$ 　　　　 para $t = 2$, $V(2) = 2(2) + 3 = 7$

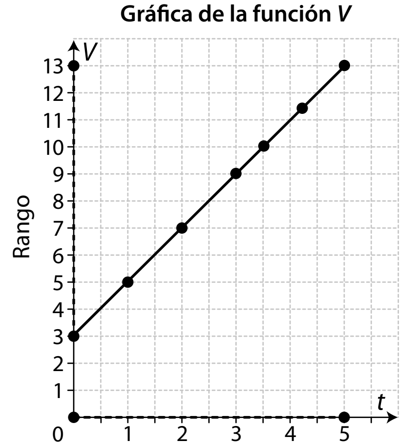
✍ Determine los siguientes valores funcionales: $V(0)$; $V(1.5)$; $V(3.8)$; $V(4)$.

Los puntos del plano cartesiano correspondientes a los pares ordenados $(t, V(t))$ constituyen la **gráfica** de la función. Veremos más adelante (sección 1.3) que funciones como V tienen gráficas como la de la figura 10.

Tiempo (t) (horas)	**Volumen (V) (litros)**
0	3
1	5
2	7
3	9
3.5	10
4.2	11.4
5	13

Tabla 2

Gráfica de la función V



Dominio $= [0, 5]$

Rango $= [3, 13]$

Figura 10

Otra manera de representar o describir una función es por medio de palabras o *verbalmente*. Por ejemplo, la función $V(t) = 2t + 3$ se representa verbalmente diciendo que "el doble del tiempo aumentado en tres".

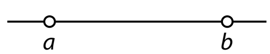
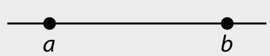
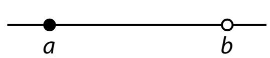
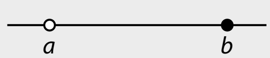
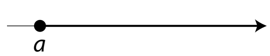
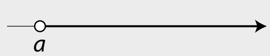
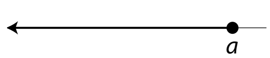
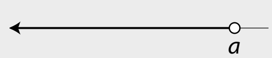
Observe cómo interviene el orden en que se realizan las operaciones en las descripciones verbales de las siguientes funciones:

Representación algebraica	Representación verbal
$f(x) = x^2$	Eleva al cuadrado un número
$f(x) = x + 5$	Un número aumentado en cinco
$f(x) = \dfrac{x+5}{2}$	El cociente entre la suma de un número y cinco, y dos
$f(x) = \dfrac{x}{2} + 5$	La suma entre la mitad de un número y cinco

Hemos visto que una función puede representarse o describirse de varias maneras:

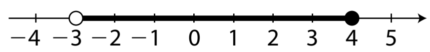
- con flechas (figura 1) → *representación sagital*
- por medio de una tabla (tabla 2) → *representación tabular*
- en el plano cartesiano (figura 10) → *representación gráfica*
- por medio de una fórmula ($V(t) = 2t + 3$) → *representación algebraica*
- con palabras "el doble del tiempo aumentado en tres" → *representación verbal*

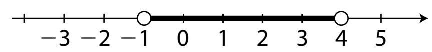
En el estudio de las generalidades de la función se requiere el uso de los intervalos para la escritura de, por ejemplo, dominio o rango de una función, donde una función es positiva, entre otros aspectos. Por lo anterior es necesario darle una mirada a la representación, en las diferentes formas, de los intervalos en los números reales.

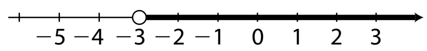
Clase de intervalo	Representación gráfica	Notación de intervalo	Desigualdad	Descripción verbal
Abierto		(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	Números reales desde *a* hasta *b*, sin incluir *a*, ni *b*.
Cerrado		$[a, b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	Números reales desde *a* hasta *b*, incluidos *a* y *b*.
Semicerrado		$[a, b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	Números reales desde *a* hasta *b*, incluido *a*, pero sin incluir *b*.
Semiabierto		$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	Números reales desde *a* hasta *b*, sin incluir a, pero incluido *b*.
Infinito		$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geqslant a\}$	Números reales desde *a* incluido, hasta infinito.
Infinito		(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	Números reales desde *a* sin incluir, hasta infinito.
Infinito		$(-\infty, a]$	$\{x \mid x \leqslant a\}$	Números reales desde $-\infty$, hasta *a* incluido.
Infinito		$(-\infty, a)$	$\{x \mid x < a\}$	Números reales desde $-\infty$, hasta *a* sin incluir.

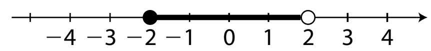
EJERCICIOS

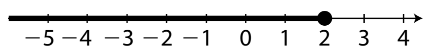
I. Exprese cada conjunto en forma de desigualdad y en notación de intervalo:

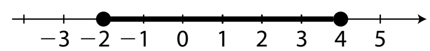
1) 

4) 

2) 

5) 

3) 

6) 

II. Exprese la desigualdad en notación de intervalos y grafique el intervalo correspondiente:

1) $x \leqslant 5$ 3) $-4 \leqslant x \leqslant 3$ 5) $x < 2$ 7) $-7 \leqslant x < -1$

2) $x \geqslant -3$ 4) $-2 < x \leqslant 5$ 6) $x > 0$ 8) $-3 < x < 1$

III. Exprese el intervalo en forma de desigualdad y represéntelo gráficamente:

1) $[-6, 0]$ 3) $(-6, -2]$ 5) $(-\infty, 3]$ 7) $[-1, \infty)$

2) $(0, \infty)$ 4) $(-4, 4)$ 6) $[-3, 4]$ 8) $[-5, 0]$

Los ejemplos 2, 3 y 4 ilustran los aspectos generales de las funciones presentados hasta el momento.

Ejemplo 2

Un artículo cuesta \$500; tomemos el costo C de varios de esos mismos artículos como una función de la cantidad n de ellos. Por ejemplo: $C(1) = 500$, $C(4) = 2000$.

i. Defina algebraicamente la función C.

ii. ¿Cuál es el dominio y el rango de C?

Solución:

i. $C(n) = 500n$

ii. El dominio es el conjunto de los enteros no negativos: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ y el rango es el conjunto de los múltiplos no negativos de 500: $\{0, 500, 1000, 1500, \ldots\}$.

✍ Haga la gráfica de la función C.

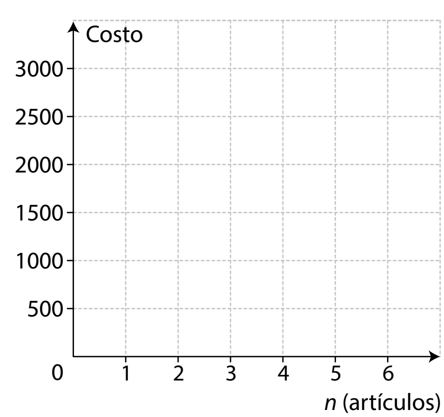


Figura 11

Ejemplo 3

La función $f(x) = x^2$, o también $y = x^2$, es la función que "*eleva al cuadrado*". En la figura 12 vemos la gráfica de esta función:

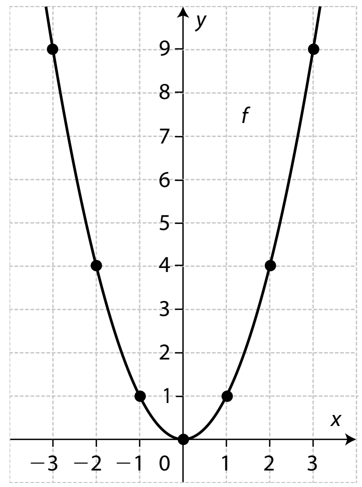


Figura 12

i. ¿Cuál es el dominio y rango de f?

ii. Halle los siguientes valores funcionales $f(-7)$, $f(4.2)$, $f(-x)$, $f(2x + 3)$, $f(a + h)$.

Solución:

i. El dominio es el conjunto de los números reales, es decir, el intervalo $(-\infty, \infty)$; el rango es el conjunto de los números reales no-negativos: el intervalo $[0, \infty)$.

ii. Valores funcionales:

$f(-7) = (-7)^2 = 49$

$f(4.2) = (4.2)^2 = 17.64$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2$

$f(2x - 3) = (2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

$f(a + h) = (a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$

✍ Si f es la función $f(x) = x^2$, encuentre:

a) $f(3) =$

b) $f(-2.5) =$

c) $f(4x) =$

d) $f(x + 5) =$

e) $f(2x - h) =$

Ejemplo 4

En la figura 13 tenemos la gráfica de una función g.

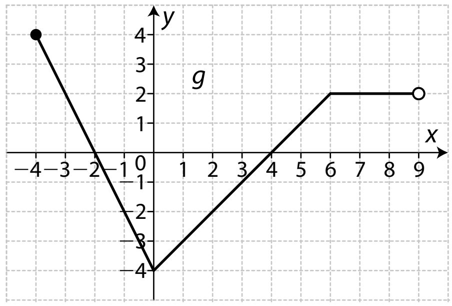


Figura 13

Con respecto a esta función, halle:

i. $g(-3)$; $g(2)$; $g(6)$

ii. dominio y rango

iii. $g(9)$

iv. puntos de corte de la gráfica con los ejes o ***"interceptos con los ejes"***.

v. intervalos donde la función es positiva y donde es negativa.

vi. los valores de x que satisfacen la ecuación $g(x) = 1$.

Solución:

i. $g(-3) = 2$; $g(2) = -2$; $g(6) = 2$

ii. El dominio de g es el intervalo $[-4, 9)$; el rango de g es el intervalo $[-4, 4]$.

iii. $g(9)$ no está definido ya que 9 no está en el dominio de g.

iv. Corte con el eje y o ***y-intercepto*** es el punto $(0, -4)$.

Cortes con el eje x o ***x-interceptos*** (llamados también ***ceros* de la función**) son los puntos $(-2, 0)$, $(4, 0)$.

v. Los valores de x para los cuales se verifica que $g(x) = 1$, son $x = -2.5$ y $x = 5$, es decir, aquellos puntos de la gráfica de g en los que la segunda coordenada es 1; dichos puntos son $(-2.5, 1)$ y $(5, 1)$. Estos puntos se obtienen en las intersecciones de la recta horizontal $y = 1$, con la gráfica de la función (figura 14):

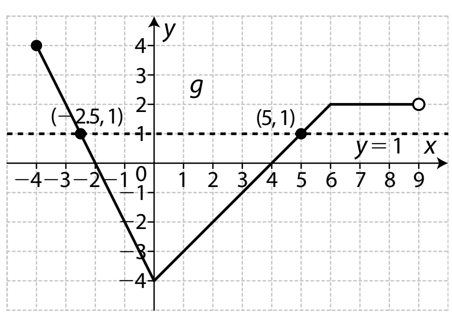


Figura 14

✍ Para la función ***g*** de la figura 14, estime:

a) $g(-1) =$

b) $g(1) =$

c) $g(2.5) =$

d) $g(7.8) =$

los valores de ***x*** para los cuales,

a) $g(x) = -2$

b) $g(x) = 2$

c) $g(x) = 3$

d) $g(x) = -5$

1.1.2 Gráficas en el plano cartesiano que son gráficas de funciones

Examinaremos ahora qué gráficas del plano cartesiano pueden ser la gráfica de una función.

Observemos las gráficas de las figuras 15 y 16:

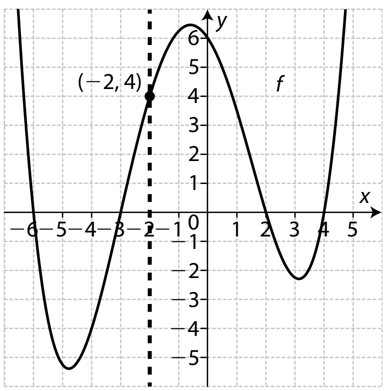


Figura 15

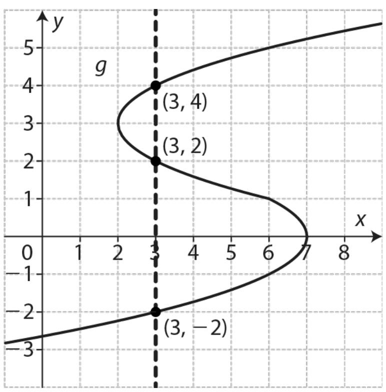


Figura 16

En la figura 15 se observa que a cada uno de los valores del dominio le corresponde un único valor del rango; por ejemplo, a $x = -2$, le corresponde solamente $y = 4$. Notemos que la recta vertical que pasa por $(-2, 4)$, no intercepta a ningún otro punto de la gráfica; la gráfica de la figura 15 sí es la gráfica de una función (en este momento no nos preocupamos por su representación algebraica).

En la figura 16, los puntos $(3, 4)$, $(3, 2)$, $(3, -2)$ indican que al número 3 le corresponde tres valores: -2, 2 y 4. Esta correspondencia no puede ser entonces una función. Observemos que la recta vertical de la figura 16 intercepta a la gráfica en más de un punto.

Las anteriores consideraciones ilustran la forma de verificar cuando una gráfica representa una función.

Prueba de la recta vertical

*Si alguna recta vertical en el plano xy intercepta a la gráfica en máximo un punto, entonces la gráfica define a **y** como una función de **x**.*

Ejemplo 5

¿Cuáles de las siguientes gráficas definen a ***y*** como una función de ***x***?

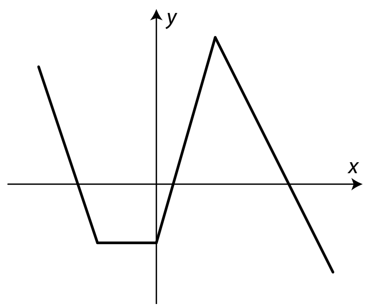


Figura 17

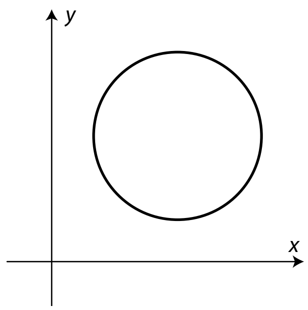


Figura 18

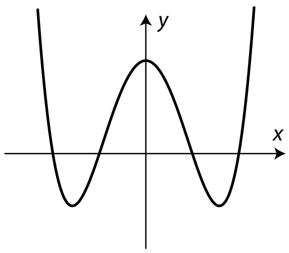


Figura 19

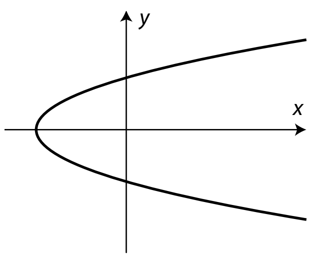


Figura 20

Solución:

La prueba de la recta vertical indica que las gráficas de las figuras 17 y 19 definen a ***y*** como una función de ***x*** ya que ninguna recta vertical intercepta a la gráfica en más de un punto (figuras 21 y 22). Las gráficas de las figuras 18 y 20 no corresponden a gráficas de funciones: hay rectas verticales que interceptan a la curva en más de un punto (figuras 23 y 24).

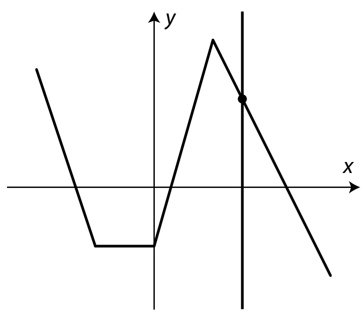


Figura 21

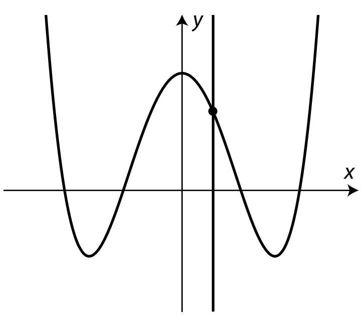


Figura 22

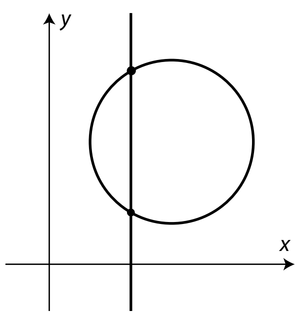


Figura 23

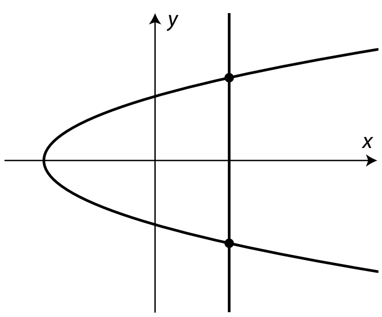


Figura 24

EJERCICIOS

I. Identifique cuáles de las siguientes correspondencias son funciones; para cada función, halle el dominio y el rango:

1)

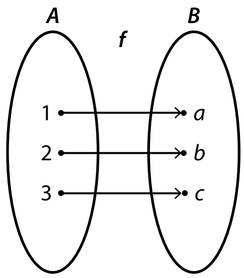


Figura 25

2)

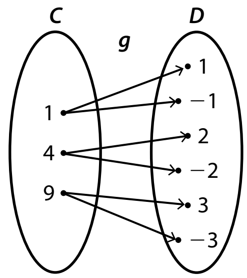


Figura 26

3)

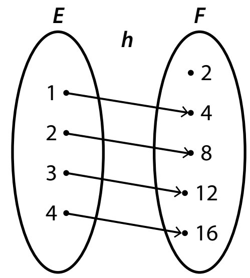


Figura 27

4)

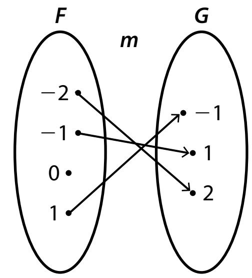


Figura 28

II. Indique cuáles de las siguientes correspondencias definen una función entre los conjuntos *A* y *B*:

Conjunto A	Correspondencia	Conjunto B
Números reales	Cubo de un número	Números reales
Estudiantes de la universidad	Número de asignaturas que cursan	Números naturales
Ciudadanos colombianos	N° de documento de Identidad	Números naturales
Números enteros	Raíz cuadrada de un número	Números reales
Estudiantes de primer semestre	Asignaturas registradas	Asignaturas que ofrece la universidad

III. Determine qué gráficas, de la figura 29, definen a y como una función de x:

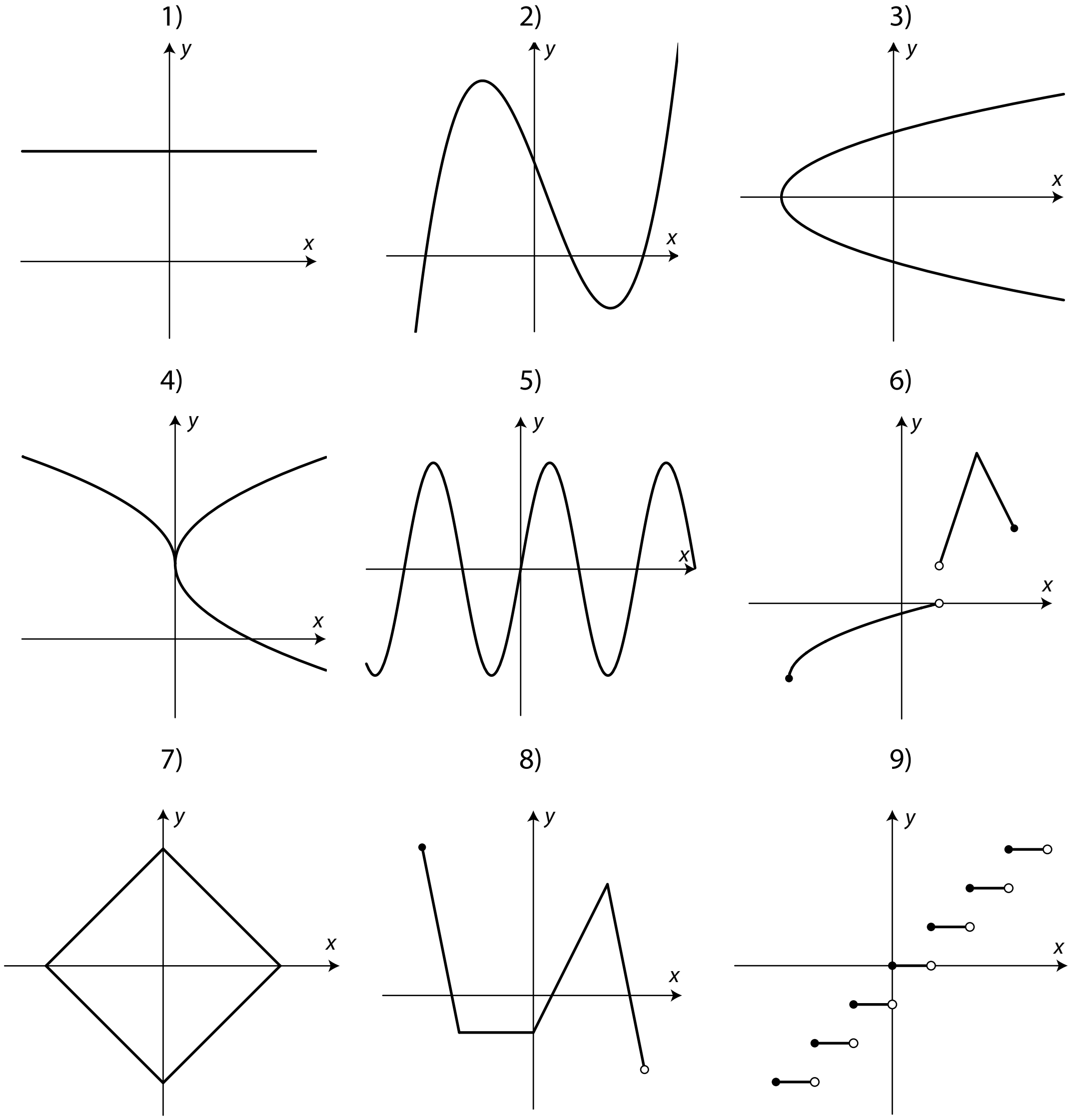


Figura 29

IV. Exprese en forma verbal las siguientes funciones:

1) $f(x) = 3x - 8$

2) $g(x) = 3(x - 8)$

3) $h(x) = \frac{1}{3}(x - 8)$

4) $m(x) = (x - 3)^3$

5) $n(x) = x^3 - 8^3$

6) $p(x) = \sqrt[3]{x - 8}$

7) $f(b) = 2b + 5$

8) $g(a) = \sqrt{a} - \sqrt{7}$

9) $h(c) = 3c^2 - 6c$

10) $m(r) = \left(\frac{1}{2}r - 3\right)^2$

11) $n(z) = \frac{3z^4 + 5}{2}$

12) $p(t) = \frac{3}{4}t^2 - 2t + 5$

V. Las funciones definidas verbalmente; represéntelas algebraicamente:

1) El triple de la suma de un número y cuatro.

2) La diferencia entre la mitad de un número y dos tercios.

3) El cociente entre, el cuadrado de la diferencia entre un número y cinco, y cuatro.

4) La diferencia entre, la raíz cuadrada de la suma entre seis veces un número y trece, y diez.

5) Cuatro veces el cubo del cociente entre, la suma de un número y nueve, y cinco.

6) Once veces el cuadrado de un número aumentado en quince.

VI. Identifique dominio, rango e interceptos con los ejes de cada función que aparece en la figura 30:

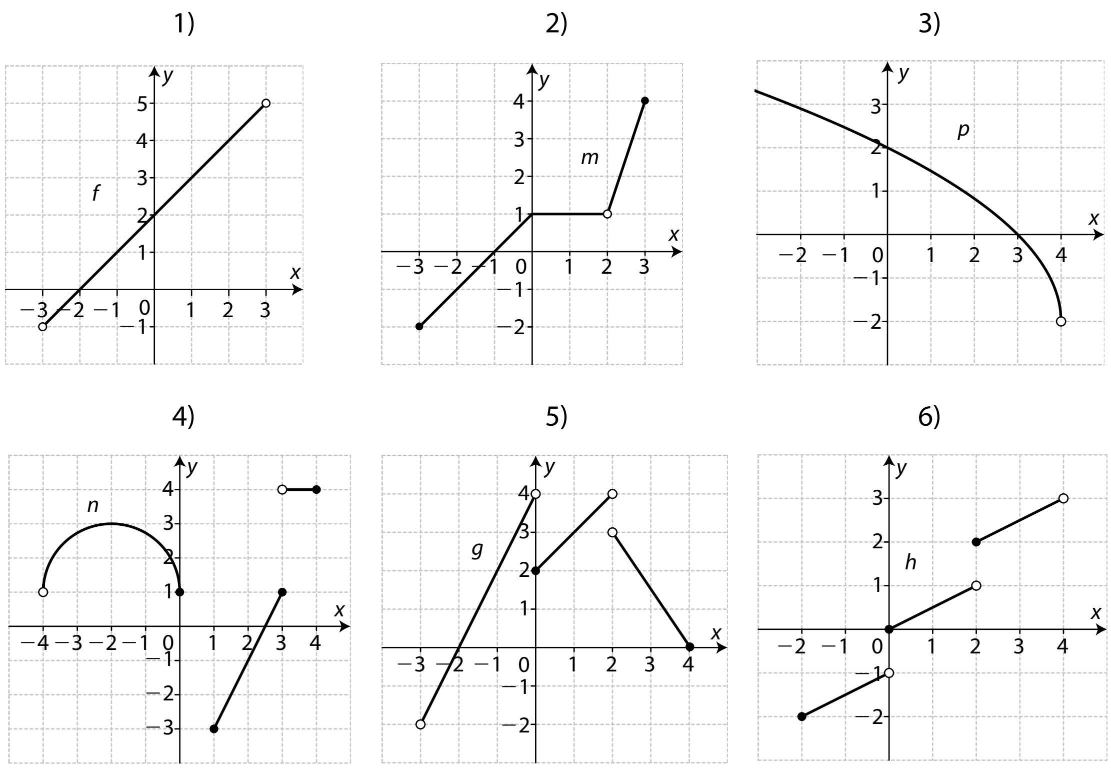


Figura 30

VII. En las figuras 31 y 32 se dan las gráficas de las funciones *g* y *h* respectivamente:

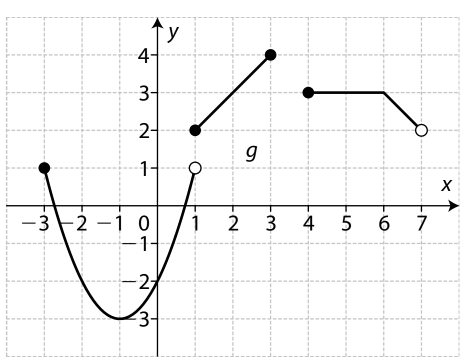


Figura 31

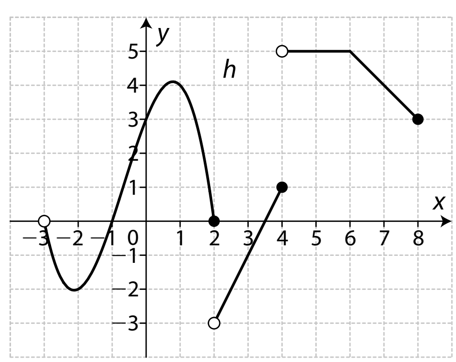


Figura 32

Determine:

$g(-3) =$	$g(1) =$	$g(4) =$	$g(-1) =$	$g(2) =$	$g(5.5) =$
$h(-2) =$	$h(2) =$	$h(4) =$	$h(-1) =$	$h(3) =$	$h(5.5) =$

Dom g:	Dom h:
Rango g:	Rango h:
Corte con el eje y:	Corte con el eje y:
Cortes con el eje x:	Cortes con el eje x:
Valores para los cuales $g(x) = 3$	Intervalos donde h es negativa

VIII. Se dan las gráficas de las funciones g y m (figuras 33 y 34):

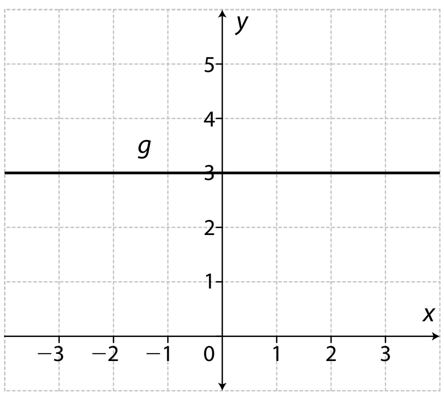


Figura 33

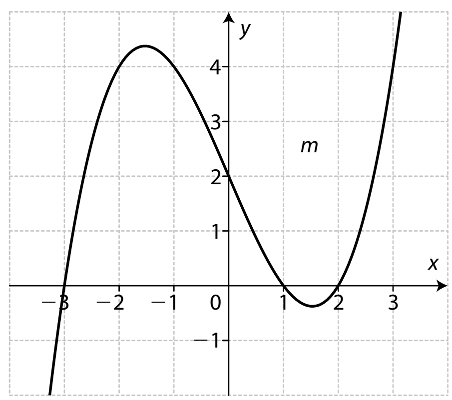


Figura 34

Estime los siguientes valores funcionales:

1) $g(-3) =$	4) $m(2.5) =$	7) $m(2) =$	10) $m(3) =$
2) $m(0) =$	5) $m(-1) =$	8) $m(-2.5) =$	11) $m\left(\frac{1}{2}\right) =$
3) $g\left(\frac{1}{2}\right) =$	6) $g(0) =$	9) $g(2) =$	12) $m\left(-\frac{1}{2}\right) =$

IX. Para cada función, determine los valores funcionales indicados:

1) $f(x) = 2x - 7$

a. $f(-3)$	c. $f(a)$	e. $f(x + h)$
b. $f(0)$	d. $f(x - 1)$	

2) $g(t) = -3t + 4$

a. $g(-3)$	c. $g\left(\frac{4}{3}\right)$	e. $g(t + 2)$
b. $g(-2)$	d. $g(-\text{t})$	

3) $h(x) = 2x^2 - 4x - 2$

a. $h(0)$
c. $h\left(\frac{1}{2}\right)$
e. $h(2 - x)$
b. $h(-1)$
d. $h(-x)$

4) $f(r) = -3r^2 + 5r$

a. $f(-2)$
c. $f\left(\frac{1}{3}\right)$
e. $f(-3r)$
b. $f\left(\sqrt{2}\right)$
d. $f(1 - r)$

5) $g(d) = d^3 - 4$

a. $g(-2)$
c. $g\left(\sqrt[3]{4}\right)$
e. $g(d + 1)$
b. $g(1)$
d. $g(-\mathrm{d})$

6) $h(x) = \dfrac{x - 3}{x + 2}$

a. $h(3)$
c. $h(\pi)$
e. $h(x + 5)$
b. $h(0)$
d. $h(-3)$
f. $h(-2)$

7) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

a. $f(8)$
c. $f(-x)$
e. $f(x^2 - 1)$
b. $f(0)$
d. $f(4 - x)$

X. En cada caso, dibuje la gráfica de una función *f* que cumpla las condiciones dadas:

1) Tenga como dominio el intervalo $[-3, 2)$ y como rango el intervalo $[1, 5)$.

2) Dominio el intervalo $(-4, 3)$ y rango $[-3, 1) \cup [2, 4)$.

3) $f(-1) = 3$, $f(4) = -2$, dominio $(-4, 1] \cup (3, 5]$.

4) Dominio $(-4, 1] \cup [3, 5)$, rango el intervalo $[-3, 4)$, y los puntos $(-3, 2)$, $(1, -3)$ pertenezcan a la gráfica de la función.

XI. Las siguientes preguntas son de *selección múltiple con múltiple respuesta* (dos de los enunciados son **verdaderos** y dos son **falsos**). Marque la letra que corresponda en la tabla de respuestas:

Si 1 y 2 son correctos marque A
Si 2 y 3 son correctos marque B
Si 3 y 4 son correctos marque C
Si 2 y 4 son correctos marque D

Teniendo en cuenta las gráficas de las funciones *f* y *g*, que aparecen en las figuras 35 y 36, responda las preguntas 1 a 4.

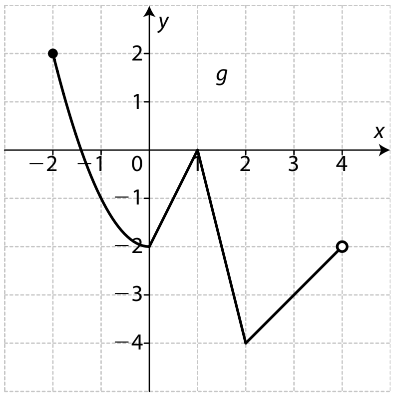


Figura 35

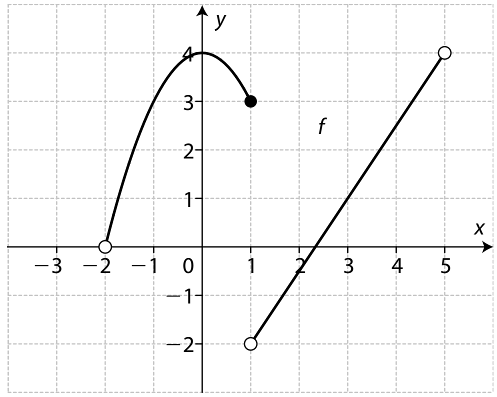


Figura 36

1) Con respecto a la función *g*, de la figura 35, ¿cuáles de los enunciados son verdaderos?

   1. El punto de corte de la gráfica con el eje *y* es $(0, -2)$.
   2. Un intervalo donde la función es negativa es $(1, 4)$.
   3. El rango de la función es el intervalo $(-4, 2)$.
   4. $g(x) = -2$ si $x = 2$.

2) De la función *g*, es correcto afirmar que:

   1. los puntos de corte con el eje *x* son $(1.5, 0)$ y $(-1, 0)$.
   2. el dominio de la función es el intervalo $[-2, 4)$.
   3. $g(4)$ no está definido.
   4. la ecuación $g(x) = -2$ tiene tres soluciones.

3) Con respecto a la función *f*, de la figura 36, es correcto afirmar que:

   1. si $x = 1$, entonces $y = -2$.
   2. el punto $(3, 1)$ pertenece a la gráfica de la función.
   3. el dominio de la función es el intervalo $(-2, 6)$.
   4. *y*-intercepto es el punto $(0, 4)$.

4) De la función *f* es cierto que:

   1. el punto $(5, 4)$ pertenece a la gráfica de la función.
   2. un punto de corte con el eje *x* es, $(-2, 0)$.
   3. la ecuación $f(x) = 4$, tiene una única solución.
   4. el rango de la función es el intervalo $(-2, 4]$.

Tabla de respuestas

Pregunta	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				

XII. Para cada una de las funciones dadas, halle y simplifique, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h \neq 0$:

1) $f(x) = -5$

2) $f(x) = 2x - 7$

3) $f(x) = x^2$

4) $f(x) = -x^2 + 4x$

Ejemplo 6

Si $\boldsymbol{f(x) = -3x + 2}$, entonces $\boldsymbol{f(x+h) =} -3\boldsymbol{(x+h)} + 2 \boldsymbol{= -3x - 3h + 2}$.

Remplazamos en la expresión dada:

$$\boldsymbol{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(-3x-3h+2)-(-3x+2)}{h}}$$

$$= \frac{-3x-3h+2+3x-2}{h} = \frac{-3h}{h} = \boldsymbol{-3}$$

1.2. Funciones crecientes, decreciente o constantes

Un piloto de ala delta despega desde una pista de lanzamiento que se encuentra a 500 pies sobre el nivel del mar.

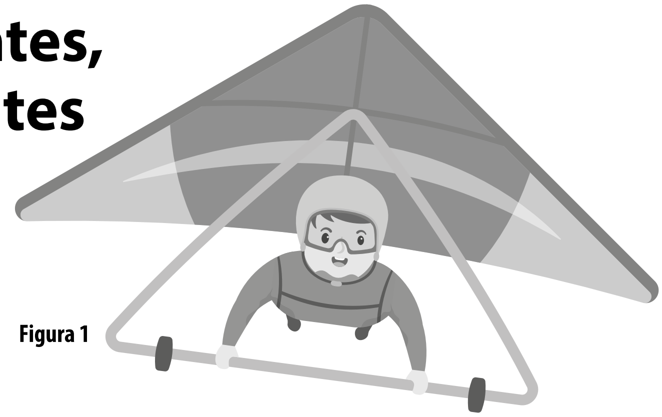


Figura 1

Un altímetro permite determinar la elevación *E* del piloto con respecto al sitio desde donde se lanzó. A continuación se muestra la gráfica de la elevación *E* como una función del tiempo *t*, en minutos, transcurridos después del lanzamiento:

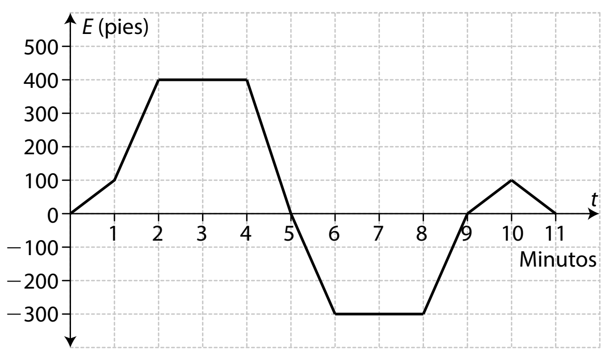


Figura 2

✍ ¿En qué intervalos de tiempo asciende el piloto?, ¿en cuáles desciende?

✍ ¿Cuándo está el piloto a la misma altura del sitio de donde se lanzó?

✍ ¿En qué intervalos de tiempo vuela a una altura constante y por cuánto tiempo lo hace?

✍ ¿Durante cuánto tiempo realiza el vuelo? (Dominio de la función).

Un aspecto por describir del *comportamiento* de una función, a partir de la gráfica, consiste en indicar en qué intervalos del dominio crece, decrece o permanece constante. Si al recorrer la gráfica de izquierda a derecha encontramos que en un intervalo abierto la gráfica sube o baja entonces la función es ***creciente*** o ***decreciente***, respectivamente, en dicho intervalo. Si no sube ni baja es ***constante*** en ese intervalo.

Una función f es **creciente** en un intervalo abierto (a, b), si para cualquiera x_1 y x_2 en el intervalo, tales que $\boldsymbol{x_1 < x_2}$, se cumple que:

$$\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$$

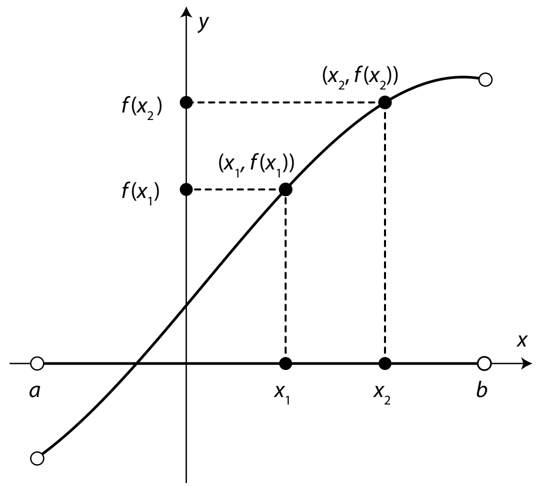


Figura 3

Una función f es **decreciente** en un intervalo abierto (a, b), si para cualquiera x_1 y x_2 en el intervalo, tales que $\boldsymbol{x_1 < x_2}$, se cumple que:

$$\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$$

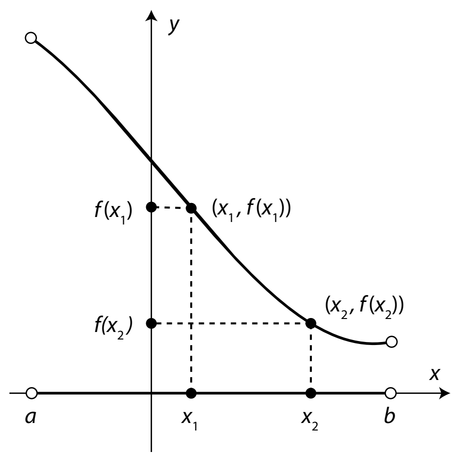


Figura 4

Una función f es **constante** en un intervalo abierto (a, b), si para cualquiera x_1 y x_2 en el intervalo, tales que $\boldsymbol{x_1 < x_2}$, se cumple que:

$$\boldsymbol{f(x_1) = f(x_2)}$$

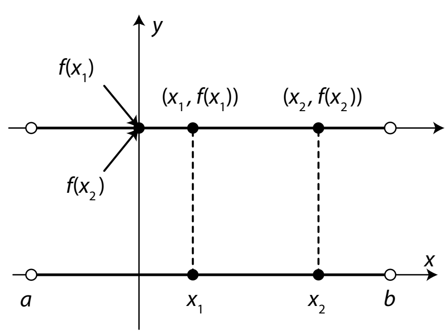


Figura 5

Tomemos por ejemplo, la función *f* cuya gráfica se muestra en la figura 6:

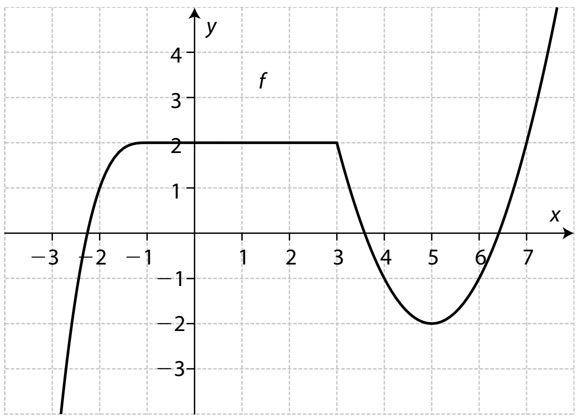


Figura 6

f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(5, \infty)$.*

Es decreciente en el intervalo $(3, 5)$

Es constante en el intervalo $(-1, 3)$

*Cuando la gráfica de la función toque el borde de la figura se considera que va hasta infinito o menos infinito.

✍ Escriba los intervalos donde crece, decrece o es constante la función *g* cuya gráfica es:

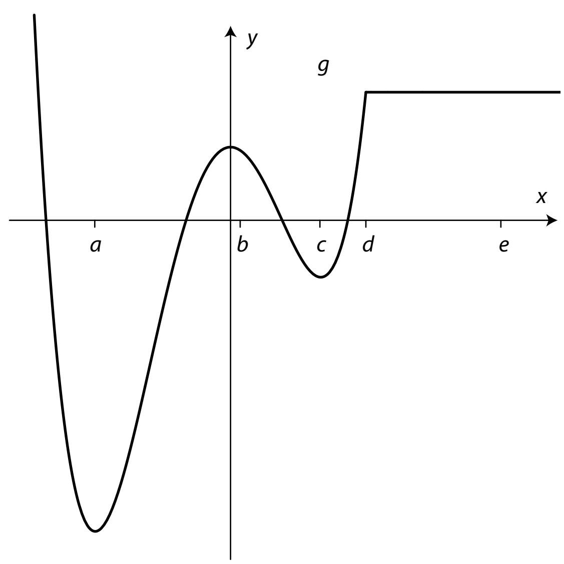


Figura 7

✍ Escriba los intervalos donde la función de elevación, *E*, (figura 2), crece, decrece o es constante:

EJERCICIOS

I. Para cada función de la figura 8:

A. indique los intervalos en los que es creciente, decreciente o constante.

B. determine el dominio de las funciones 1), 3) y 5), y el rango de las funciones 2), 4) y 6).

C. halle dos valores funcionales que estén definidos y uno que no lo esté (si lo hay).

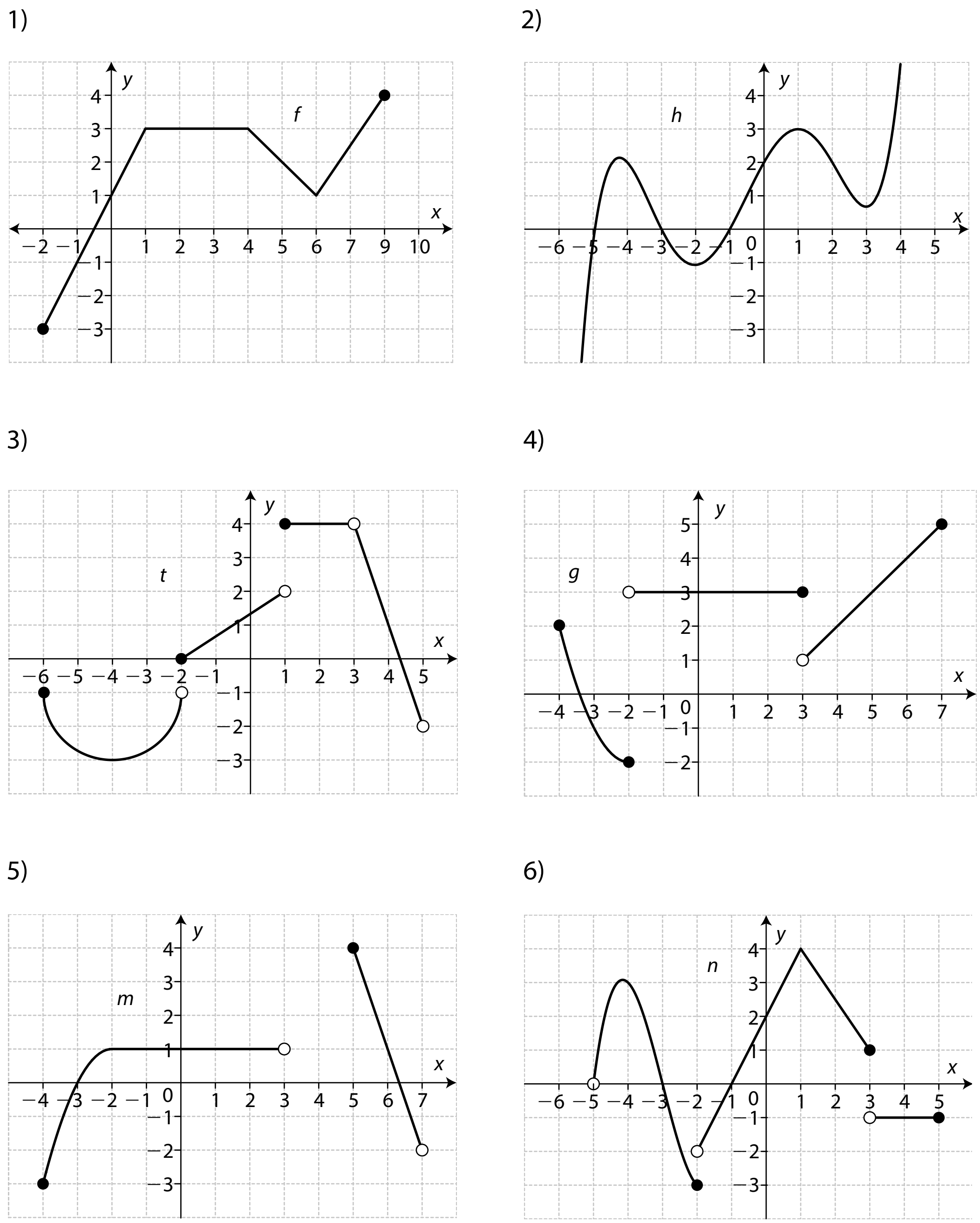


Figura 8

II. En cada caso, dibuje la gráfica de una función que tenga como dominio los números reales y que cumpla las condiciones pedidas:

1) Que sea decreciente en el intervalo $(1, \infty)$ y creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$.

2) Creciente en el intervalo $(-3, 2)$ y constante en el intervalo $(2, 6)$. Dominio el intervalo $[-3, 6)$.

3) Creciente en los reales positivos, decreciente en los reales negativos. $f(-3) = 5$, $f(0) = 2$ y $f(2) = 4$.

4) Decreciente para los x, tal que, $-5 < x < 1$, creciente para los x, tal que, $3 < x < 7$. $f(-5) = 4$, $f(-1) = 0$, $f(3) = -2$ y $f(5) = 2$. Dominio, el intervalo $[-5, 1) \cup [3, 7)$.

5) Creciente y positiva en el intervalo $(-6, -1)$; decreciente y negativa en el intervalo $(-1, 4)$. $f(-3) = 3$ y $f(3) = -3$.

III. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta:

Si 1 y 2 son correctos marque A
Si 2 y 3 son correctos marque B
Si 3 y 4 son correctos marque C
Si 2 y 4 son correctos marque D

1) De la función f, cuya gráfica se muestra en la figura 9, es correcto afirmar:

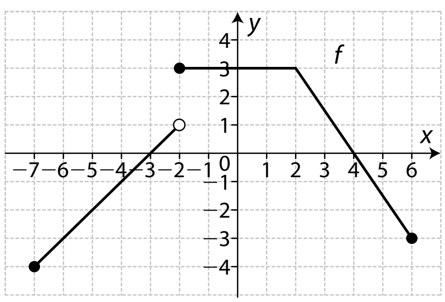


Figura 9

1. es decreciente en el intervalo $(-7, -2)$.
2. el rango es el intervalo $[-4, 3]$.
3. es constante en el intervalo $(-2, 2)$.
4. $f(x) = 0$, para $x = 3$.

2) De la función g, cuya gráfica se muestra en la figura 10, es cierto que:

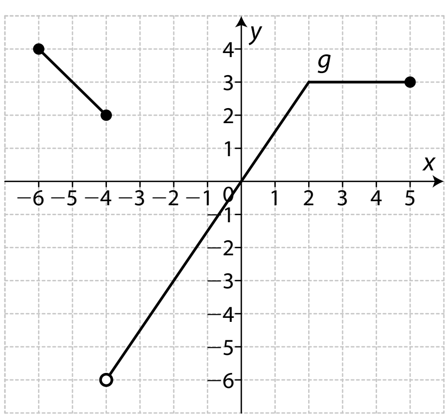


Figura 10

1. es decreciente en el intervalo $(-4, 2)$.
2. la función es positiva en el intervalo $[-4, 0)$.
3. es constante en el intervalo $(2, 5)$.
4. la ecuación $g(x) = 3$ tiene infinitas soluciones.

Tabla de respuestas

Pregunta	A	B	C	D
1				
2				

IV. Teniendo en cuenta la gráfica de la función h (figura 11), escriba V o F, según corresponda, si el enunciado es verdadero o falso.

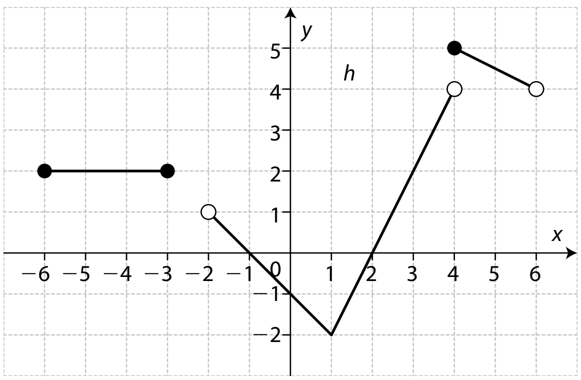


Figura 11

1) $Dom\ h = [-6, -3] \cup (-2, 6)$

2) La función tiene un único cero

3) En el intervalo $[-6, -3]$, h es positiva

4) y-intercepto es el punto: $(0, 1)$

5) h es negativa en el intervalo $(-1, 2)$

6) $h(x) = -1$, para $x = 0$, o $x = 1.5$

7) h es decreciente en el intervalo $(1, 4)$

8) $h(x) = 2$ tiene solo 3 soluciones

9) Rango $h = [-2, 5]$

10) $h(4) - h(-5.5) + 2h(1) < h(3)$

1.3. Función lineal

En la actividad inicial expresábamos el volumen V como una función del tiempo t:

$V(t) = 2t + 3$. Nos ocuparemos ahora de funciones como esa.

> Una función que puede escribirse en la forma $f(x) = mx + b$, donde ***m*** y ***b*** son constantes, es una ***función lineal***. La gráfica de una función lineal es una ***línea recta***.

Algunas características de las funciones lineales las identificaremos considerando los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Haga la gráfica y determine, para cada una de las siguientes funciones, dominio, rango, cortes con los ejes, intervalos donde es positiva o es negativa e identifique si es creciente, decreciente o constante:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 3, \quad h(x) = -\frac{2}{3}x, \quad j(x) = 5$$

Solución:

Escribamos la ecuación $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ como $y = \frac{1}{2}x - 3$. Observemos que corresponde a la ecuación de la recta expresada en la forma pendiente-intercepto: $y = mx + b$; m es la pendiente, b es el intercepto con el eje y.

En la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$, el intercepto con el eje y es igual a -3 y la pendiente es igual a $\frac{1}{2}$.

Una forma de hacer la gráfica de esta recta consiste en dibujar primero el punto correspondiente al corte con el eje y: $(0, -3)$; otro punto de la recta lo conseguimos por medio de la pendiente: a partir del punto $(0, -3)$ hacemos un desplazamiento horizontal de 2 unidades a la derecha y luego un desplazamiento vertical de 1 unidad hacia arriba, llegando al punto $(2, -2)$.

Podemos trazar otros puntos de la recta siguiendo el mismo procedimiento anterior.

Trazamos luego la recta por $(0, -3)$ y $(2, -2)$, figura 1, que es la gráfica de la función lineal

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 3.$$

Para hallar el corte con el eje x, algebraicamente, debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$, esto es:

$$\frac{1}{2}x - 3 = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}x = 3$$

$$x = 6$$

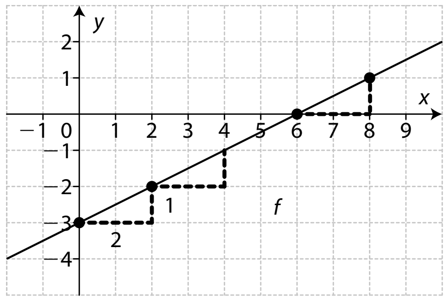


Figura 1

Dominio: números reales; intervalo $(-\infty, \infty)$.

Rango: números reales; intervalo $(-\infty, \infty)$.

Corte con el eje y: $(0,-3)$, ya que $f(0) = -3$

Corte con el eje x: $(6, 0)$.

La función es positiva en el intervalo $(6, \infty)$.

f es una función creciente.

En la función $h(x) = -\frac{2}{3}x$, tenemos que $y = -\frac{2}{3}x + 0$; luego $m = -\frac{2}{3}$, $b = 0$.

Gráfica de la función h (figura 2). Procedemos de la misma forma como en el ejemplo 1.

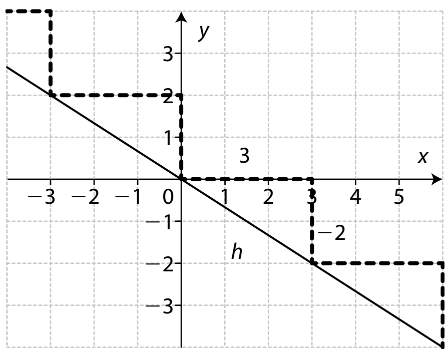


Figura 2

Dominio: números reales; intervalo $(-\infty, \infty)$.

Rango: números reales; intervalo $(-\infty, \infty)$.

Corte con el eje y: $(0, 0)$, ya que $f(0) = 0$

Corte con el eje x: $(0, 0)$

Al resolver la ecuación $f(x) = 0$,

esto es, $-\frac{2}{3}x = 0$ encontramos que $x = 0$.

La función es positiva en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es negativa en el intervalo $(0, \infty)$.

h es una función decreciente.

Para la función $j(x) = 5$, tenemos que $y = 0x + 5$; es decir, $m = 0$, $b = 5$ y la gráfica, teniendo en cuenta los ejemplos anteriores, es:

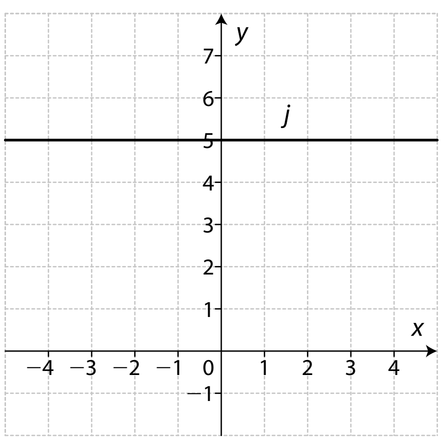


Figura 3

Dominio: números reales.

Rango: $\{5\}$.

Corte con el eje y: $(0, 5)$, ya que $f(0) = 5$

Corte con el eje x: no hay

Al resolver la ecuación $f(x) = 0$,

esto es, $5 = 0$ encontramos que no hay solución.

La función siempre es positiva.

j es una función constante.

✍ Trace la gráfica de cada función lineal en los planos cartesianos que se encuentran en seguida; determine dominio, rango, cortes con los ejes, y si la función es creciente, decreciente o constante.

a) $g(x) = -x + 2$

b) $k(x) = -4$

c) $m(x) = x$

d) $g(x) = 2x - 3$

a)

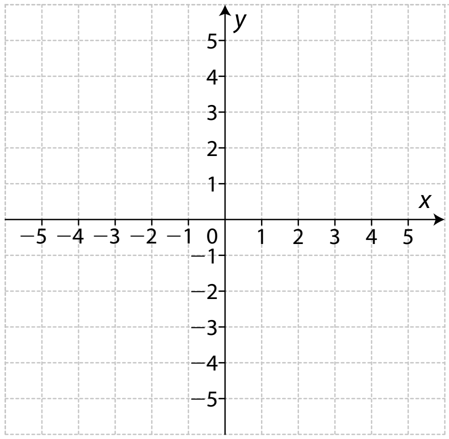


Figura 4

b)

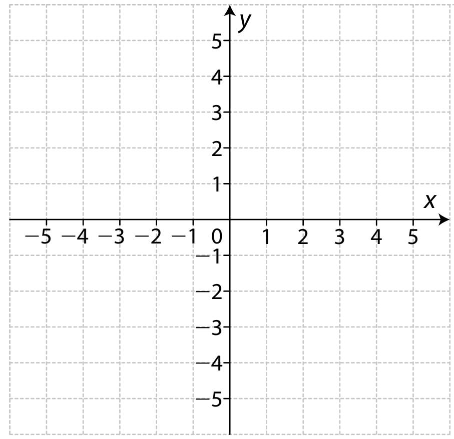


Figura 5

c)

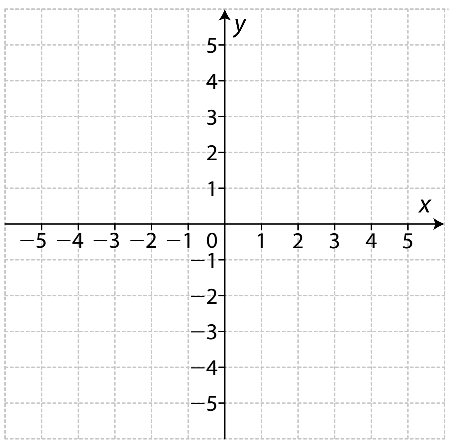


Figura 6

d)

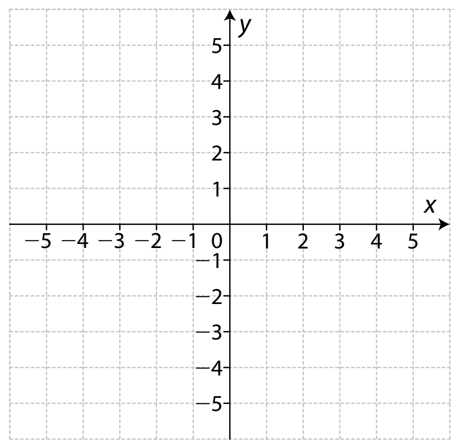


Figura 7

✍ Escriba las palabras decreciente, creciente o constante en las casillas de la tabla 1, según corresponda.

Función lineal: $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$

$m > 0$	
$m = 0$	
$m < 0$	

Tabla 1

Hallaremos la expresión algebraica de una función lineal dados dos puntos y con dominio restringido.

Ejemplo 2

Halle la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos $(-6, -5)$ y $(6, 3)$, si el dominio de la función es el intervalo $[-6, 9)$.

- La **pendiente** de la recta que pasa por los puntos dados es:

$$\boldsymbol{m} = \frac{-5-3}{-6-6} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$$

- Los dos puntos dados están en el dominio de la función; ahora, con la pendiente y uno de los puntos hallamos la ecuación; $\boldsymbol{m = \frac{2}{3}}$ y el **punto (6, 3)**:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{2}{3}(x - 6)$$

$$y = \frac{2}{3}x - 4 + 3$$

$$y = \frac{2}{3}x - 1, \quad -6 \leqslant x < 9$$

Luego la función lineal es: $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{3}x - 1}$, para x en el intervalo $\boldsymbol{[-6, 9)}$.

- Para determinar el **rango** tomamos los extremos del intervalo y los remplazamos en la función:

$$f(-\mathbf{6}) = \frac{2}{3}(-6) - 1 = -5; \qquad f(\mathbf{9}) = \frac{2}{3}(9) - 1 = 5$$

Los puntos extremos son: $(-6, -5)$, incluido; $(9, 5)$, sin incluir.

Así el rango es el intervalo $[-\mathbf{5}, \mathbf{5})$.

- El **intercepto con el eje *x*** se halla igualando a cero la función lineal:

$$0 = \frac{2}{3}x - 1$$

$$\frac{2}{3}x = 1$$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$$

Así, el intercepto de la gráfica de la función lineal con el eje x, es el punto $(\mathbf{1.5}, \mathbf{0})$

- Para determinar en qué intervalo la función es **positiva o negativa**, se toma el intercepto con el eje x, se examina si la función es creciente (pendiente positiva) y se concluye que es positiva en el intervalo $(1.5, 9)$ y es negativa en el intervalo $[-6, 1.5)$.

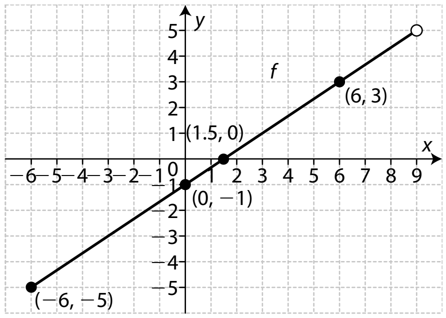


Figura 8

Dominio: intervalo $[-6, 9)$.

Rango: intervalo $[-5, 5)$.

$f(9)$ no está definido; 9 no está en el dominio.

Corte con el eje y: $(0, -1)$, ya que $f(0) = -1$

Corte con el eje x: $(1.5, 0)$.

La función es positiva en el intervalo $(1.5, 9)$.

La función es negativa en el intervalo $[-6, 1.5)$

f es una función creciente.

Ejemplo 3

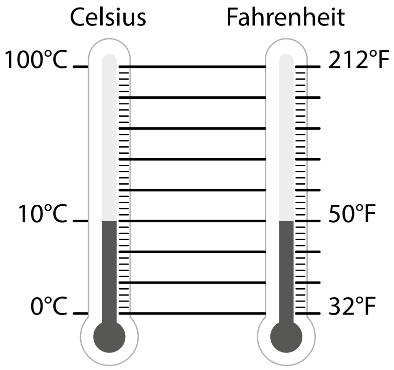
La escala de temperatura Fahrenheit (F) se puede expresar como una función lineal de la escala Celsius (C). Una temperatura de 10° C corresponde a 50° F y una de 25° C corresponde a 77° F.

i) Escriba a F como una función de C.

ii) ¿Qué interpretación puede darse a la pendiente y al intercepto con el eje F?

iii) La temperatura de ebullición del agua es de 100° C, ¿a cuántos °F equivale?

iv) ¿A qué temperatura las dos escalas marcan el mismo número?



Solución:

i) $F = mC + b$

Los puntos (10, 50) y (25, 77) pertenecen a la gráfica de F

Pendiente:

$$m = \frac{77 - 50}{25 - 10} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5}$$

Remplazamos $F = 50$, $C = 10$ y $m = \frac{9}{5}$ en $F = mC + b$:

$$50 = \frac{9}{5}10 + b$$

$$50 - 18 = b$$

$$b = 32$$

Luego:

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

ii) La pendiente $\frac{9}{5}$ indica que por cada 5 grados de aumento en temperatura medidos en la escala Celsius, la medición en la escala Fahrenheit aumenta 9 grados.

El intercepto con el eje F es $(0, 32)$ lo cual indica que 0 grados centígrados corresponden a 32 grados Fahrenheit.

iii) $C = 100\ °C$

$$F = \frac{9}{5}100 + 32$$

$$F = 180 + 32 = 212$$

Luego, $100°C$ corresponden a 212 °F; el punto de ebullición del agua es de 212 °F.

iv) Hacemos $F = C$ y remplazamos en $F = \frac{9}{5}C + 32$.

$$C = \frac{9}{5}C + 32$$

$$C - \frac{9}{5}C = 32$$

$$-\frac{4}{5}C = 32$$

$$C = -40$$

Por tanto, una temperatura de -40 °C corresponde a -40 °F.

✍ De acuerdo con la Ley de Charles, la presión P, medida en pascales, de un volumen fijo de gas, está relacionada linealmente con la temperatura T, medida en grados Celsius.

En un experimento se encontró que cuando $T = 30$, $P = 80$ y cuando $T = 60$, $P = 100$.

a) Exprese la presión P como función de la temperatura T.

b) Haga la gráfica de la función.

1.3.1. Variación directa

Una persona camina en línea recta, con rapidez uniforme, a razón de 2 metros por segundo a partir de cierto lugar. La distancia que la separa de ese lugar la podemos expresar como una función del tiempo en la forma $d = 2t$. Es frecuente expresar la relación entre distancia y tiempo diciendo que la distancia varía en forma *directa* con respecto al tiempo; con esto se quiere decir que si el tiempo (transcurrido desde que sale de ese lugar) se duplica, entonces la distancia recorrida se duplica, si el tiempo se triplica la distancia se triplica, etc.

✍ Haga la gráfica de la función $d = 2t$, $t \geqslant 0$

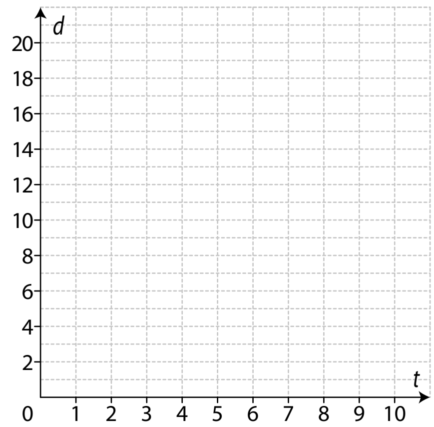


Figura 9

> Si una función lineal es de la forma $y = mx$ entonces decimos que y varía en forma ***directa*** con respecto a x o que y es ***directamente proporcional*** a x; ***m*** es la ***constante de proporcionalidad.***
> La gráfica es una recta que ***pasa por el origen.***

Ejemplo 4

Los siguientes son ejemplos de magnitudes que son directamente proporcionales:

- El peso de un producto y su precio. Si pesa 0 libras, se paga 0 pesos.

  Si 5 libras de ciruelas cuestan \$4000, ¿cuál es el costo de comprar 9 libras del mismo tipo de ciruelas?

  $$y = mx$$

  $$4000 = m(5) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m} = \mathbf{800}$$

  Entonces: $y = 800(9) = \$7200$

  El precio que se debe pagar por las 9 libras de ciruelas es de \$7200.

- El número de cajas y la cantidad de vasos que se empacan en cada caja. Si en 7 cajas se empacan 84 vasos, ¿cuántas cajas del mismo tipo se requieren para empacar 264 vasos del mismo tamaño y forma?

  $$y = mx$$

  $$84 = m(7) \quad \rightarrow \quad m = 12$$

  La constante de proporcionalidad en este caso es el número de vasos que caben en cada caja.

  En este caso se quiere averiguar el número de cajas, o sea x:

  $$264 = 12x$$

  $$\boldsymbol{x} = \mathbf{22}$$

Se necesitan 22 cajas para empacar 264 vasos.

En una variación directa se cumple que:

$$\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_2}$$

O lo que es equivalente:

$y_1x_2 = y_2x_1$, si ninguno de ellos es (0, 0)

En el ejemplo anterior se tiene:

(7, 84) y (22, 264):

$$\frac{84}{7} = \frac{264}{22} = \mathbf{12}$$

$$84 \times 22 = 7 \times 264 = 1848$$

- Nota obtenida en una prueba y número de respuestas correctas.
- El volumen de un objeto y su peso; si el objeto pesa el doble el peso será el doble, siempre que esté hecho del mismo material. Para un volumen de 0 cm^3, su peso es 0 *g*.

EJERCICIOS

I. De las siguientes funciones, identifique cuáles son lineales; para las que lo sean, haga su gráfica, determine el dominio, rango, cortes con los ejes, si es una función creciente, decreciente o constante, y en qué intervalos es positiva y cuál es negativa.

1) $f(x) = x - 2$	8) $g(x) = 3$
2) $g(x) = -x$	9) $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$
3) $h(x) = \frac{x+2}{x-1}$	10) $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$, si $-3 \leqslant x \leqslant 6$
4) $f(x) = -2x + 1$	11) $g(x) = \cos x$
5) $g(x) = \sqrt{x-3}$	12) $f(x) = 0$ si $-2 \leqslant x \leqslant 5$
6) $h(x) = e^{2x}$	13) $h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, si $-3 \leqslant x \leqslant 3$
7) $m(x) = \log(2x + 1)$	14) $g(x) = -3x + 4$, si $0 < x \leqslant 6$

II. Forme las parejas correspondientes a la ecuación y su gráfica:

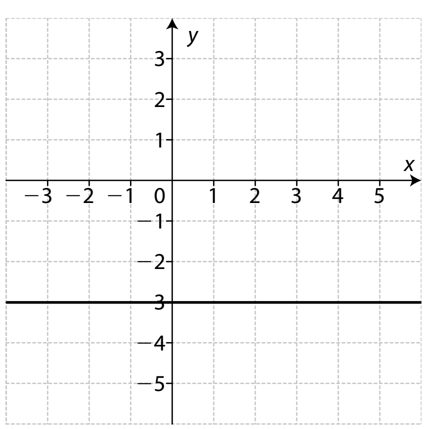
1) $f(x) = \frac{2}{3}x - 3$ (   )

2) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$ (   )

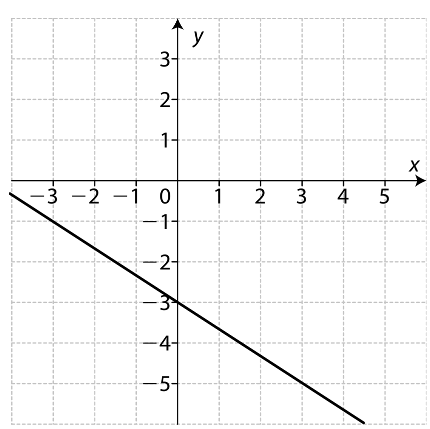
3) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 3$ (   )

4) $f(x) = -3$ (   )

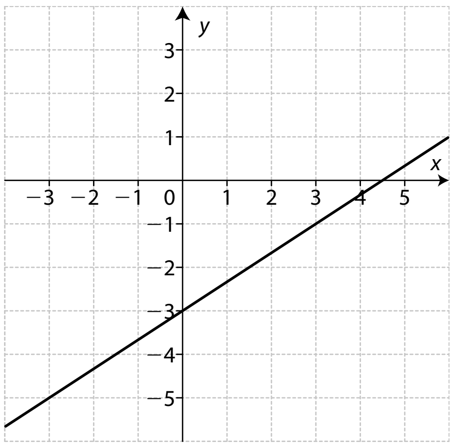
a)



b)



c)



d)

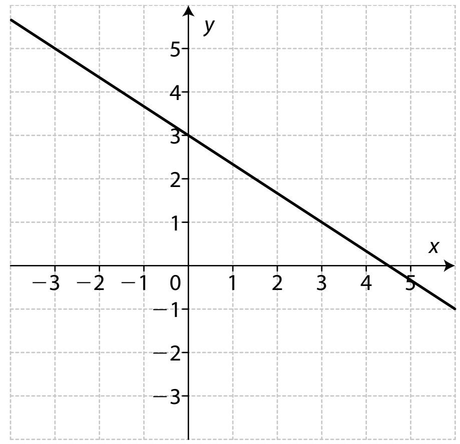


Figura 10

III. Problemas sobre variación directa:

1) Suponga que y varía directamente con x. Cuando $x = 3$, $y = 9$. Halle y cuando $x = 12$.

2) Tres galones de gasolina cuestan \$24 000. Exprese el costo C de una compra de gasolina como una función de la cantidad x de galones comprados.

3) Considere latas cilíndricas con la misma base. El volumen de una lata es proporcional a la altura de esta. Si el volumen de una lata es 300 cm^3 cuando su altura es 11 cm, halle el volumen de una lata de 16 cm de altura.

IV. Para los ejercicios del 1) al 3) tenga en cuenta:

Si 1 y 2 son correctos marque A
Si 2 y 3 son correctos marque B
Si 3 y 4 son correctos marque C
Si 2 y 4 son correctos marque D

1) De la función $f(x) = -2x + 5$, es correcto afirmar:

1. la gráfica de f es una recta.
2. f es positiva en el intervalo $(-\infty, 2.5)$.
3. es una función creciente.
4. $f\left(\frac{3}{2}\right) = -1$.

2) De la función $g(x) = \frac{3}{2}x - 1$, es cierto que:

1. $g(x) = -5$ para $x = 8$.
2. la gráfica de g es una recta cuya pendiente es $m = \frac{3}{2}$
3. la gráfica corta al eje x en el punto $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$
4. es una función creciente.

3) Dados los puntos $(-2, 2)$, $(4, -2)$, y h la función cuya gráfica es la recta que los une, es correcto afirmar que:

1. la función es negativa en el intervalo $(-\infty, 1)$.
2. $h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.
3. la pendiente de la recta es $\frac{2}{3}$.
4. la función h es decreciente.

Tabla de respuestas

Pregunta	A	B	C	D
1				
2				
3				

V. Dada la función $p(x) = -\frac{1}{2}x + 3$, para x en el intervalo $(-8, 12]$, escriba V o F, según si el enunciado relacionado con p, sea verdadero o falso.

1) La gráfica de p es una recta con pendiente: $m = 2$
2) El dominio de la función p es el intervalo $(-8, 12]$
3) El intercepto con el eje x, es el punto $(-6, 0)$
4) El rango de p es el intervalo, $[-3, 7)$
5) La función es positiva en el intervalo, $(-8, 6)$
6) El intercepto con el eje y, es -3
7) El punto $(-6, 6)$, está en la gráfica de p
8) p es una función creciente
9) La imagen de -12 es 9

VI. Problemas

1) Al ascender, el aire seco se enfría y expande. A nivel del suelo la temperatura es de 24 °C, y a una altura de 800 metros es de 16 °C.

a) Escriba la expresión que modela la temperatura T (en °C) como función de la altura h (en kilómetros). Suponga que la relación entre T y h es lineal.

b) ¿Qué representa la pendiente?

c) Haga la gráfica de la función T.

d) ¿Cuál es la temperatura a una altura de 1.5 km?

e) ¿Cuál es la altura si la temperatura es de 4 °C?

2) Un antropólogo puede usar la función lineal para estimar la estatura de un hombre o de una mujer, dada la longitud del húmero, el hueso del codo al hombro.

   La estatura, en centímetros, de un hombre adulto con un húmero de longitud x, en centímetros, está dada por la función:

$$H(x) = 2.89x + 70.64$$

   La estatura, en centímetros, de una mujer adulta con un húmero de longitud x, en centímetros, está dada por la función:

$$M(x) = 2.75x + 71.48$$

   Un húmero de 26 cm fue encontrado en unas ruinas. Asumiendo que era de una mujer, ¿qué estatura tenía ella? Compare el resultado si se asume que era de un hombre. ¿Cuál es el dominio de la función M?

3) Desde la cima de una carretera montañosa, un topógrafo realiza varias mediciones horizontales, x, y las respectivas mediciones verticales, y, las cuales se registran en la siguiente tabla (x y y están en metros).

x	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
y	-1.5	-3	-4.5	-6	-7.5	-9	-10.5	-12

   a) Ubique los puntos en el plano cartesiano; ¿es posible unir todos los puntos con una sola recta?

   b) En caso de unir todos los puntos, halle la función lineal cuya gráfica sea la recta trazada.

   c) ¿Qué significa la pendiente de la recta del inciso b) en el contexto del problema?

   d) Si se quiere poner una señal de tránsito en la carretera, indicando la inclinación del camino, por ejemplo "pendiente del 12%", ¿qué debe indicar la señal en este problema?

Para los problemas 4, 5 y 6 tenga en cuenta la siguiente información:

Costo fijo (gastos generales): es la suma de todos los costos que son independientes del nivel de producción, por ejemplo, alquiler y seguros. Este costo se debe pagar independientemente de que se produzca o no.

Costo variable: es la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, por ejemplo, salarios y materiales.

Costo total: es la suma de los costos variable y fijo:

Costo total = Costo variable + Costo fijo

Ingreso total: es el dinero que se recibe por la venta de un producto.

Ingreso total = (precio por unidad) (número de unidades)

Utilidad (o ganancia): es el ingreso total menos el costo total.

Utilidad = ingreso total − costo total

4) El costo de cada camisa es de \$2 000 y los *costos fijos* de producción son \$800 000. La capacidad máxima de producción de la fábrica es de 1500 camisas.

   a) Escriba una función que modele el costo de producción C de n camisas.

   b) Determine el dominio de C.

   c) Halle C (570).

   d) ¿Cuántas camisas se producen si el costo es de \$2 670 000?

Los costos de capital de una empresa son altos por los elementos que duran más de un año y pierden el valor o se desgastan con el tiempo. Ejemplos de estos son los equipos y muebles. El valor de estos declina o deprecia (baja), con el paso del tiempo. Una forma de calcular la depreciación es con el método de la línea recta, usando el valor inicial y estimando la vida útil del activo (en una gráfica corresponde al intercepto con el eje x).

5) En un restaurante se compra un horno por 3750 dólares. Al cabo de 6 años, tendrá que ser remplazado.

   a) Escriba una función lineal que relaciones el valor, V, del horno durante los 6 años que estará en uso.

   b) ¿Cuál es el valor del horno al cabo de 2 años?

   c) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido si el valor del horno es de 1562.5 dólares?

6) Suponga que un *software* adquirido en enero de 2008 por un valor de \$1 500 000, en noviembre de 2008 se estimó su valor en \$850 000.

   a) ¿Cuál es el valor con que se deprecia por mes dicho *software*?

   b) Escriba la expresión que modela el costo C del *software* en función de t, medido en meses.

   c) Encuentre el intercepto con el eje horizontal (t). ¿Qué significa?

   d) Haga el gráfico de la función $C(t)$.

7) Un vendedor gana un salario básico mensual de \$650 000 y obtiene una bonificación del 25% de las ventas realizadas.

   a) Indicar cuáles son la variable independiente y la variable dependiente en la situación planteada.

   b) Escriba una función que exprese el salario, S, del vendedor en términos de las ventas realizadas x.

   c) ¿Cuál es el salario del vendedor si realiza, en un mes, ventas por un valor de \$2 800 000?

   d) Si el salario del mes es de \$1 712 500, ¿cuánto dinero por ventas realizó el vendedor?

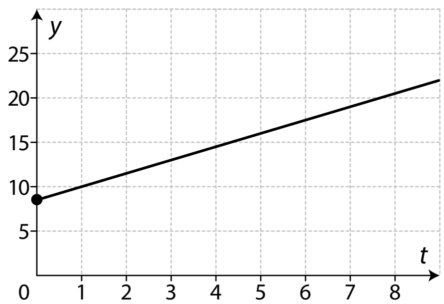
8) Relacione cada situación descrita con la gráfica correspondiente.

a) Una persona cancela mensualmente a una cooperativa una cuota de $120 para liquidar un préstamo de $1080.

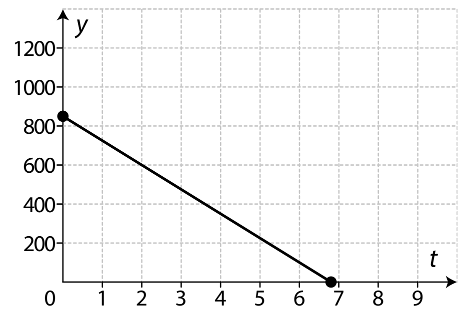
b) El empleado de una tienda recibe $22.5 por día más el 40% de las ventas realizadas.

c) Una impresora comprada por $850 se deprecia $125 por año.

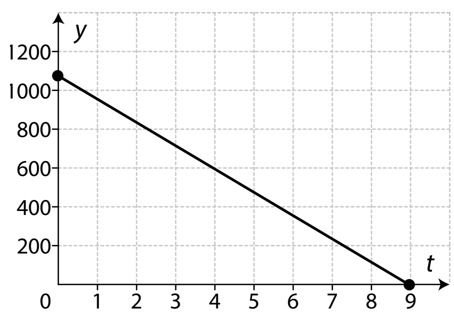
d) Un fabricante recibe $8.50 por hora más $1.5 por cada artículo producido por hora.



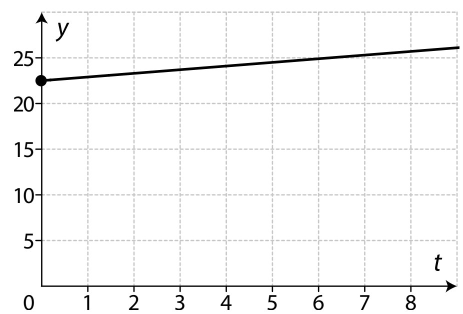
Gráfica 1



Gráfica 3



Gráfica 2



Gráfica 4

1.4. Funciones definidas a trozos

En ocasiones, la definición de una función requiere de varias instrucciones como lo ilustra la siguiente situación:

La tarifa para entrar a un espectáculo es de \$10 000 para menores de edad, y de \$15 000 para mayores de edad. Consideremos la tarifa T como una función de la edad x de una persona. La gráfica de T se muestra en la figura 1:

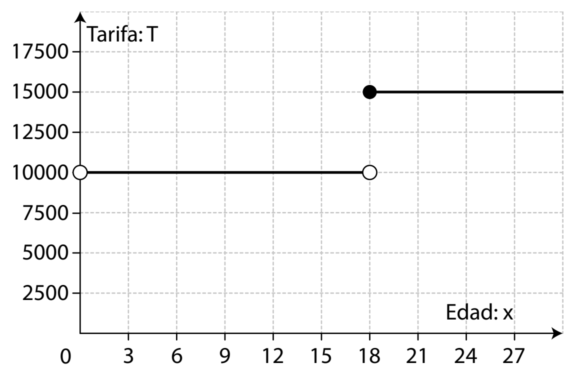


Figura 1

Podemos definir la función T así:

$$T(x) = \begin{cases} 10\,000 & \text{si} \quad 0 < x < 18 \\ 15\,000 & \text{si} \quad x \geqslant 18 \end{cases}$$

La función anterior está definida *a trozos* o *por partes*.

> *Una función f está definida a* ***trozos*** *si en diferentes partes de su dominio está definida con expresiones distintas.*

Ejemplo 1

Defina cada una de las funciones de la figura 2; determine luego los siguientes valores funcionales: $f(-2)$; $f(0)$; $f(3)$; $g(-2)$; $g(0)$; $g(2)$; $g(3)$; $g(5)$; $g(-3)$.

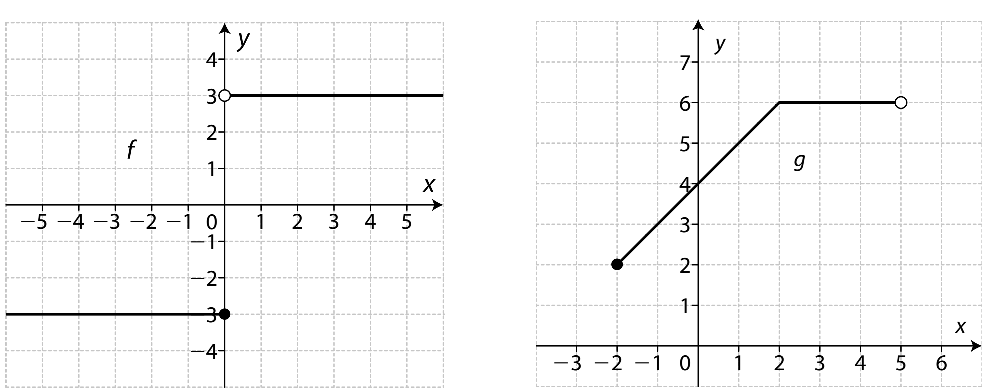


Figura 2

Solución:

Los segmentos horizontales de la gráfica de f pertenecen a las rectas $y = -3$; $y = 3$.

Definimos entonces la función haciendo las restricciones en el dominio de acuerdo con la gráfica:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para hacer la definición de la función g, hallamos la ecuación de la recta que contiene al segmento inclinado: $y = x + 4$. El segmento horizontal pertenece a la recta $y = 6$. Haciendo las restricciones correspondientes tenemos:

$$g(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 6 & \text{si} \quad 2 < x < 5 \end{cases}$$

Valores funcionales:

$f(-2) = -3$; $\quad f(0) = -3$; $\quad f(3) = 3$

$g(-2) = -2 + 4 = 2$; $\quad g(0) = 0 + 4 = 4$; $\quad g(2) = 2 + 4 = 6$; $\quad g(3) = 6$

$g(5)$: no está definido; $\quad g(-3)$: no está definido

✍ Defina a trozos las funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 3:

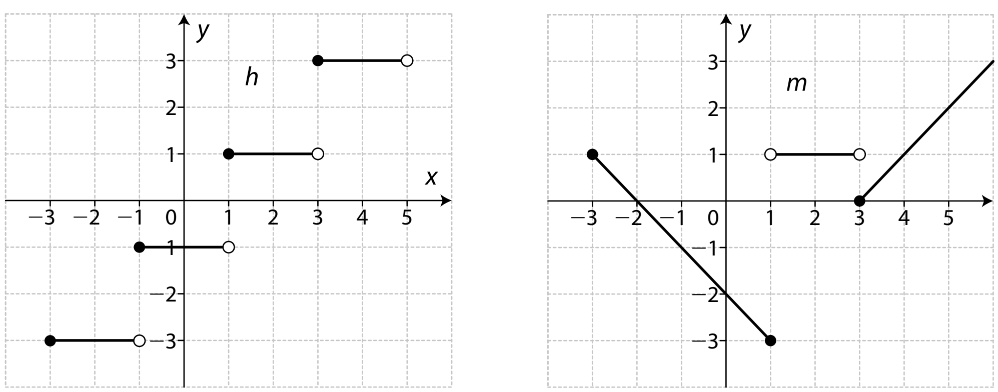


Figura 3

Ejemplo 2

Trace la gráfica de la función:

$$p(x) = \begin{cases} -x + 3, & -4 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

y luego halle: dominio, rango, interceptos con los ejes, intervalo donde es creciente y donde es decreciente, $p(-4)$, $p(-2)$, $p(1)$, $p(3)$, $p(6)$.

Solución:

Teniendo en cuenta la representación gráfica de una recta, trazamos las dos rectas y borramos la parte de ellas que no está en el intervalo correspondiente (dominio).

$p(-4) = -(-4) + 3 = 7,$ $\quad p(-2) = -(-2) + 3 = 5,$ $\quad p(1) = -(1) + 3 = 2$

$p(3) = 2(3) - 1 = 5,$ $\quad p(6) = 2(6) - 1 = 11$

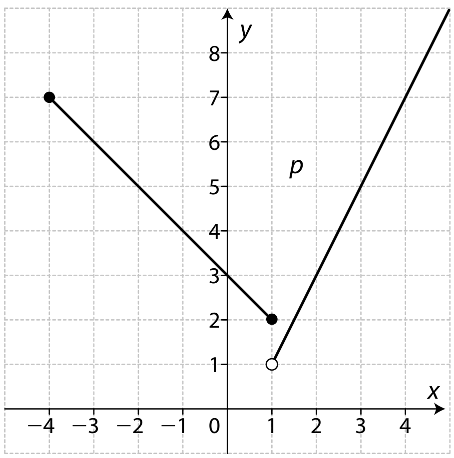


Figura 4

Dominio de p: intervalo $[-4, \infty)$

Rango de p: intervalo $(1, \infty)$

Intercepto con el eje y: punto de coordenadas $(0, 3)$

Intercepto con el eje x: no tiene

La ecuación $p(x) = 5$, tiene dos soluciones: $x = -2$, $x = 3$

La ecuación $p(x) = 1$, no tiene solución.

Intervalo donde es creciente: $(1, \infty)$

Intervalo donde es decreciente: $(-4, 1)$

La función es positiva en todo su dominio

Ejemplo 3

En la oficina de correos, el costo de enviar una carta cuyo peso sea menor o igual a 10 gramos es de \$3500; por cada gramo o fracción adicional se cobran \$500. Si p representa el peso de las cartas, y C el costo del envío, trace la gráfica y defina a trozos la función C.

Solución:

De acuerdo con la información dada, la gráfica correspondiente a la función C es:

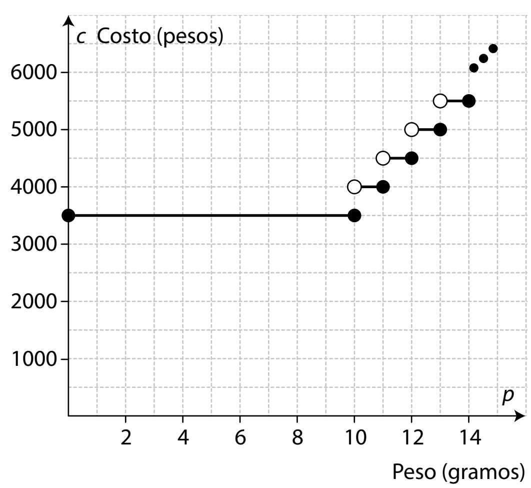


Figura 5

Definición a trozos:

$$C(p) = \begin{cases} 3500 & si \quad 0 < p \leq 10 \\ 4000 & si \quad 10 < p \leq 11 \\ 4500 & si \quad 11 < p \leq 12 \\ 5000 & si \quad 12 < p \leq 13 \\ 5500 & si \quad 13 < p \leq 14 \end{cases}$$

Ejemplo 4

Considere la distancia D de un punto de la recta numérica al origen (figura 6) como una función de la coordenada x del punto. Haga la gráfica de la función D y defínala como una función a trozos.

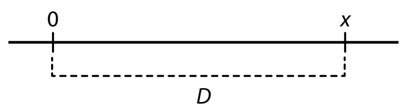


Figura 6

Solución:

La siguiente tabla muestra la distancia ***D*** de varios puntos de la recta numérica al origen:

Coordenada *x* del punto	0	1	-1	4	-4
D	0	1	1	4	4

Tabla 1

La función D se llama también función valor absoluto y se representa con un par de barras: $|\quad|$. Esta función la definimos a trozos así:

$$D(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

La gráfica de la función valor absoluto es:

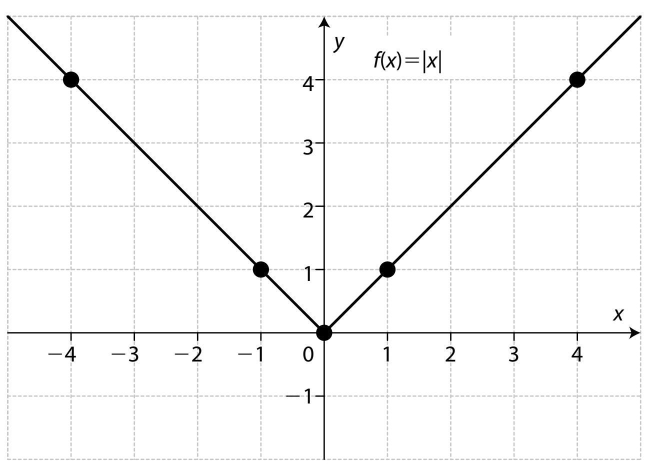


Figura 7

✍ Resuelva la ecuación: $|y| = 4$

✍ Represente gráficamente la función: $f(x) = |x + 2|$

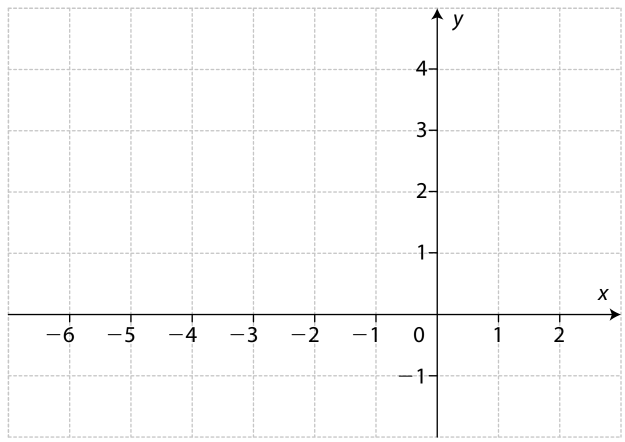


Figura 8

Los ejemplos 1 y 3 muestran funciones cuyas gráficas están formadas por segmentos horizontales en las cuales se han utilizado dos o más instrucciones (se han definido a trozos). No siempre se requieren varias instrucciones para definir una función cuya gráfica esté formada por varios segmentos como se aprecia en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5

Consideremos la *función que asigna a cada número real x el mayor entero que es menor o igual a x* (si el número es entero la función asigna el mismo número; si no lo es entonces asigna el entero más próximo que se encuentra a la izquierda, en la recta numérica). Esta función se llama función ***mayor entero*** y se simboliza $[\![x]\!]$.

Por ejemplo:

$[\![0]\!] = 0, [\![1]\!] = 1, [\![1.7]\!] = 1, [\![2.55]\!] = 2, [\![-0.35]\!] = -1, [\![-1]\!] = -1, [\![-1.78]\!] = -2, [\![-3.5]\!] = -4$

Por tanto,

$$[\![x]\!] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leqslant x < 3 \\ 3 & \text{si} \quad 3 \leqslant x < 4 \\ & \dots \\ -1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 0 \\ -2 & \text{si} \quad -2 \leqslant x < -1 \\ -3 & \text{si} \quad -3 \leqslant x < -2 \\ & \dots \end{cases}$$

Gráfica de la función mayor entero;

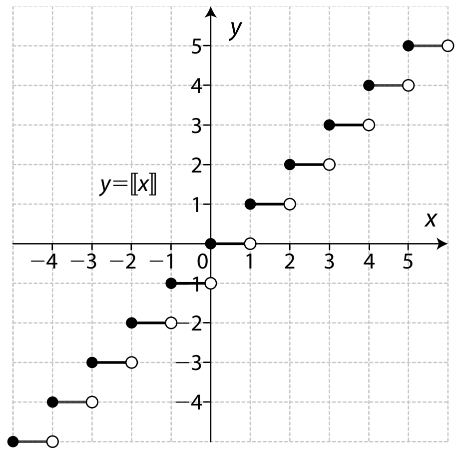
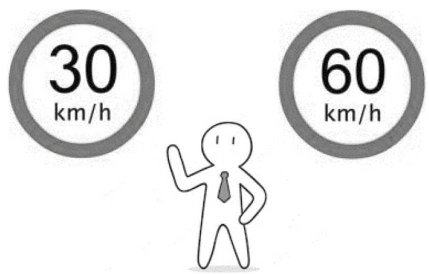


Figura 9

Notemos que solo se requirió de una instrucción para definirla y su gráfica consta de infinitos segmentos.

Ejemplo 6

En una avenida de una ciudad, la velocidad mínima permitida es de 30 km/h, y la velocidad máxima es de 60 km/h. La multa para los que excedan la velocidad máxima permitida es de \$70 por cada kilómetro y \$40 por cada kilómetro menos, para los que manejen por debajo de 30 km/h. La velocidad máxima permitida en dicha ciudad es de 120 km/h.



i) ¿Cuánto se paga de multa si se alcanzó una velocidad de 68 km/h? ¿Cuánto si la velocidad es de 25 km/h?

ii) Exprese el valor de la multa, ***M***, como una función de la velocidad, ***v***.

iii) Si a un usuario le cobran \$2450 por concepto de multa, ¿a qué velocidad (km/h) iba en su auto?

iv) Haga la gráfica de la función *M*; tenga en cuenta el dominio de la función.

Solución:

i) $M(68) = 70(68 - 60) = 560;$ $\qquad M(25) = 40(30 - 25) = 200.$

Se debe pagar \$560 si excede la velocidad a 68 km/h y debe pagar \$200 si lleva una velocidad de 25 km/h.

ii) $M(v) = \begin{cases} 40(30 - v) & \text{si} \quad v < 30 \\ 0 & \text{si} \quad 30 \leqslant v \leqslant 60 \\ 70(v - 30) & \text{si} \quad 60 < v \leqslant 120 \end{cases}$

iii) $70(v-60)=2450$

$$70v-4200)=2450$$

$$70v=2450+4200$$

$$70v=6650$$

$$v=\frac{6650}{70}=95$$

El conductor iba a una velocidad de 95 km/h, para que le cobren una multa de \$2450.

iv. Gráfica de la función M:

$Dom=[0,120]$

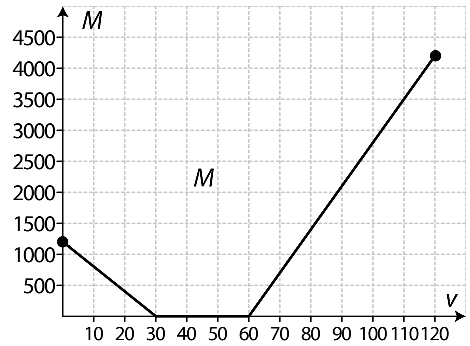


Figura 10

EJERCICIOS

I. Calcule los valores funcionales correspondientes a cada función:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x<1\\ -2 & \text{si} \quad x\geqslant 1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}2x+4 & \text{si} \quad -6\leqslant x<-1\\ x^2-1 & \text{si} \quad -1\leqslant x<3\\ -3x+2 & \text{si} \quad 3\leqslant x<7\end{cases}$$

1) $f(-5)=$ $\quad f(-3.5)=$ $\quad f(1)=$ $\quad f(4)=$ $\quad f(7.5)=$

2) $g(-4)=$ $\quad g(-1)=$ $\quad g(0)=$ $\quad g(3)=$ $\quad g(5.5)=$

II. Haga la gráfica de cada función:

1) $f(x)=\begin{cases}4 & \text{si} \quad x\leqslant 2\\ -3 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

2) $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x-1 & \text{si} \quad x<-3\\ 2 & \text{si} \quad -3<x\leqslant 7\end{cases}$

3) $h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & \text{si} \quad x<4\\ x-3 & \text{si} \quad x\geqslant 4\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si} \quad x\leqslant -2\\ -1 & \text{si} \quad -1<x<3\\ -\frac{1}{3}x & \text{si} \quad x\geqslant 3\end{cases}$

5) $g(x)=\begin{cases}2x+7 & \text{si} \quad x<-2\\ 1-x & \text{si} \quad -2\leqslant x<4\\ -3 & \text{si} \quad 4\leqslant x<8\end{cases}$

6) $h(x)=\begin{cases}4 & \text{si} \quad -5\leqslant x<-3\\ \frac{3}{2}x-2 & \text{si} \quad -2\leqslant x<2\\ -2x+5 & \text{si} \quad x\geqslant 2\end{cases}$

III. Escriba el dominio y el rango de las funciones cuyas gráficas se muestran; luego defina, a trozos, cada una:

1)

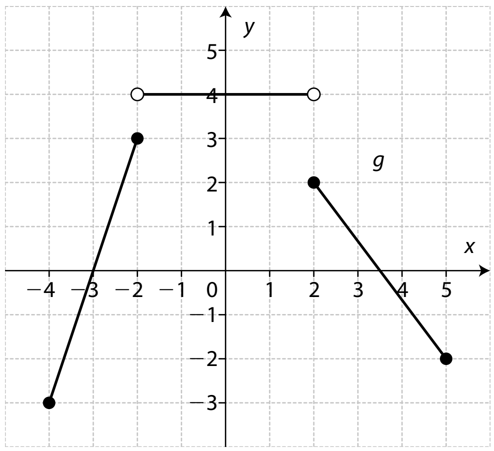


Figura 11

2)

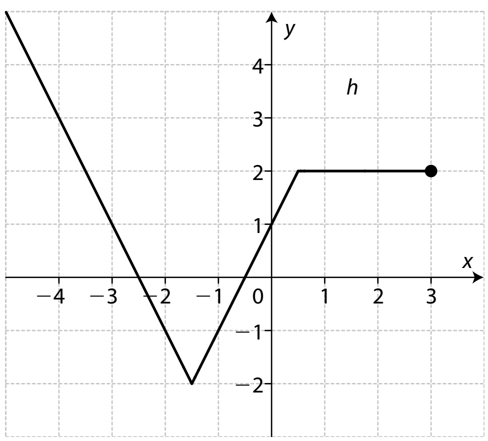


Figura 12

3) ¿Esta función se puede describir utilizando valor absoluto? Si es posible, describa la función a trozos en términos de valor absoluto.

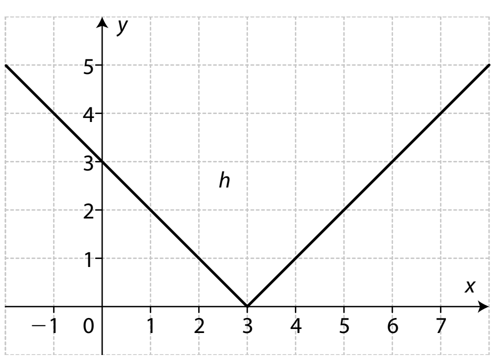


Figura 13

4) Escriba el dominio y el rango de la función f; luego defina a trozos dicha función. Halle los interceptos con los ejes, intervalos en que la función es positiva e intervalos en que es negativa; intervalos donde crece, decrece o es constante.

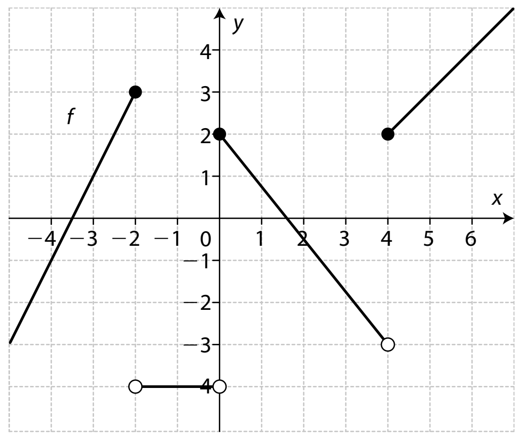


Figura 14

IV. Problemas:

1) El cargo básico en la facturación del servicio de agua en una ciudad es de \$5000. Para un consumo no superior a 20 metros cúbicos se cobra el metro cúbico a \$2000. Los metros cúbicos que se consuman por encima de 20 se cobran a \$3000 cada uno.

   a) ¿Cuál es el valor a pagar si hubo un consumo de 16 metros cúbicos?

   b) ¿Cuál es el valor a pagar si hubo un consumo de 24.5 metros cúbicos?

   c) Exprese el costo C en la facturación como una función del número de metros cúbicos x consumidos.

   d) Haga la gráfica de la función C.

2) En cierta ciudad la carrera mínima en taxi cuesta \$4000 la cual corresponde a recorridos de 50 unidades o menos (cada 100 metros recorridos el taxímetro avanza una unidad); por cada unidad mayor que 50, se cobran \$70.

   a) Exprese el costo de una carrera como función de la cantidad de unidades marcadas por el taxímetro; indique el domino.

   b) ¿Cuánto se debe pagar por un recorrido de 96 unidades?

   c) Trace la gráfica de la función.

   d) Si el costo de una carrera fue de \$11 000, ¿cuántas unidades marcó el taxímetro?

3) La tarifa, por persona, en un hotel es la siguiente: si el número de noches de hospedaje es menor o igual a 3, se pagan \$50 000 por cada noche; la noche adicional vale \$40 000.

   a) ¿Cuánto paga una persona de hospedaje por 2 noches?, ¿por 5 noches?, ¿por 9 noches?

   b) Exprese el valor a pagar como una función de la cantidad de noches de hospedaje.

   c) Trace la gráfica de la función.

   d) ¿Cuántas noches se hospedó una persona que pagó \$390 000?

4) La tarifa, T, en un parqueadero en cierta ciudad es la siguiente: si el número de horas es menor o igual que 3, se cobra \$3800 **por hora**. Por cada **hora adicional** (o fracción) se cobra \$2400, hasta 8 horas. Si el servicio se presta por más de 8 horas, se cobra una tarifa fija de \$20 000.

   a) ¿Cuál es el valor a pagar, si un vehículo está 2.5 horas en el parqueadero?, ¿cuál, si está 7.5 horas?, ¿cuál si permanece por 11 horas?

   b) Halle la expresión que permite hallar el valor a pagar, T, en función del número de horas, t, que el vehículo permanece en el parqueadero.

   c) Si se pagaron \$18 600, ¿cuánto tiempo estuvo el vehículo en el parqueadero?

V. Escriba en el paréntesis una **V** o una **F** si el enunciado relacionado con la función ***m*** es verdadero o falso.

$$m(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{4}x & \text{si } -10 \leqslant x \leqslant 2 \\ -5 & \text{si } \quad 4 < x \leqslant 8 \\ x - 6 & \text{si } \qquad x > 8 \end{cases}$$

1) Cuando $x = -5$, m es negativa. ( )

2) En el intervalo $(8, \infty)$, m es decreciente. ( )

3) La gráfica de m intercepta al eje y en 1. ( )

4) El dominio de m es el intervalo $[-10, 8)$. ( )

5) $m(-8) \geqslant m(5) + m(10)$. ( )

6) La gráfica de m intercepta al eje x en 6. ( )

7) m es constante en el intervalo $(4, 8)$. ( )

VI. Preguntas de selección múltiple con **única** respuesta:

1) La función h que define la gráfica que se muestra en la figura 13, es:

A. $h(x)=\begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad x\leq -2 \\ 4 & \text{si} \quad -2<x\leq 2 \\ \frac{3}{2}x+5 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

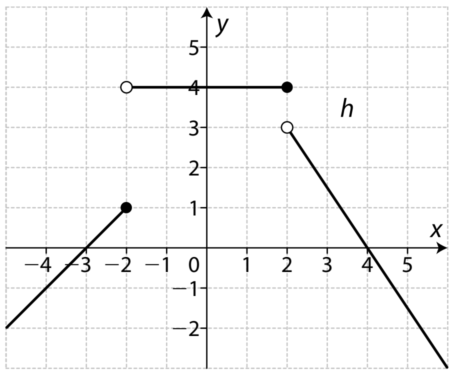


Figura 15

B. $h(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x\leq -2 \\ 4 & \text{si} \quad -2<x\leq 2 \\ -\frac{3}{2}x+6 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

C. $h(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x\leq -2 \\ 4 & \text{si} \quad -2<x\leq 2 \\ -\frac{3}{2}x+5 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

D. $h(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x\leq -1 \\ -4 & \text{si} \quad -1<x\leq 2 \\ \frac{3}{2}x+6 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

2) De la función $g(x)=\begin{cases} 3x-1 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ -\frac{1}{2}x+3 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$, el enunciado **falso** es:

a) la función g es decreciente en el intervalo $(2,\infty)$

b) la gráfica de la función es:

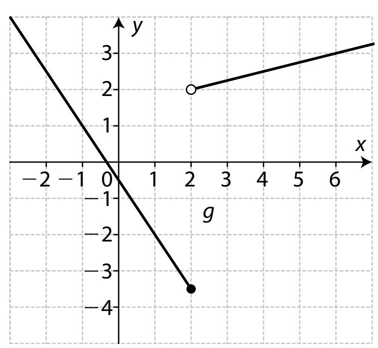


Figura 16

c) el rango de g es el intervalo $(-\infty, 5]$

d) si $x=11$, $g(x)=-\frac{5}{2}$

1.5. Transformaciones de funciones

Las funciones lineales que vimos en las secciones anteriores son de fácil representación en el plano cartesiano ya que solo requieren de dos puntos. Veremos ahora funciones que requieren de más puntos para trazar sus gráficas.

Una técnica muy útil para trazar la gráfica de una función consiste en examinar si se puede obtener a partir de la gráfica de una función ya conocida mediante ciertas *transformaciones geométricas.*

Al efectuar una transformación geométrica a la gráfica de una función, lo que resulta no es siempre la gráfica de alguna función. En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f; en la figura 2 la gráfica obtenida al hacer una traslación de la gráfica de f, y en la figura 3 la obtenida al realizar una rotación de la gráfica de f. ¿Cuál de esas transformaciones produce la gráfica de una función?

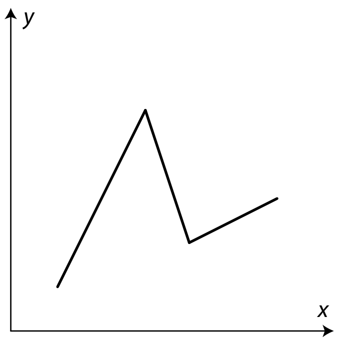


Figura 1

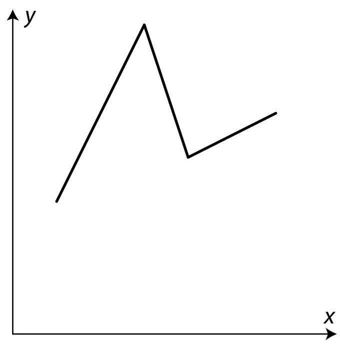


Figura 2

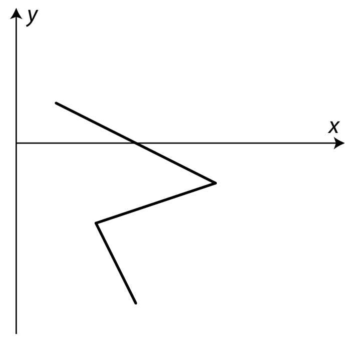


Figura 3

Veremos en esta sección algunas transformaciones geométricas que convierten gráficas de funciones en gráficas de nuevas *funciones*, cuyas ecuaciones se obtienen realizando operaciones algebraicas sencillas.

Ilustraremos las transformaciones que veremos con el efecto que producen en la gráfica de la función que aparece a continuación:

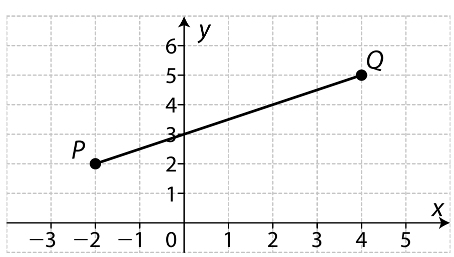


Figura 4

✍ Compruebe que la gráfica de la figura 4 corresponde a la función:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3, \quad -2 \leqslant x \leqslant 4$$

✍ Determine el dominio y rango de f.

1.5.1. Desplazamientos verticales

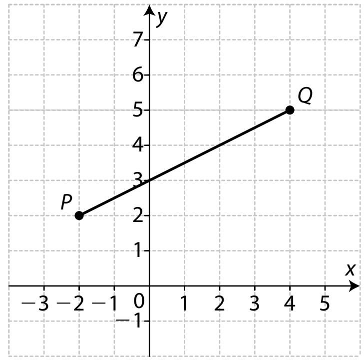


Figura 5

✍ Dibuje en la figura 5 el segmento $P'Q'$ que se obtiene al desplazar dos unidades hacia arriba el segmento PQ.

✍ Determine las coordenadas de P' y de Q'.

✍ Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g.

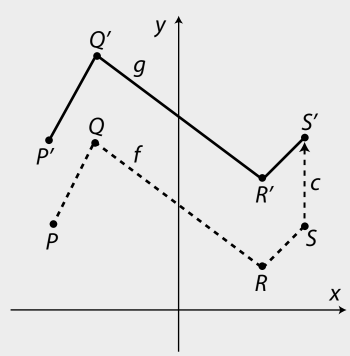
✍ Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:

$$g(x) = f(x) + 2$$

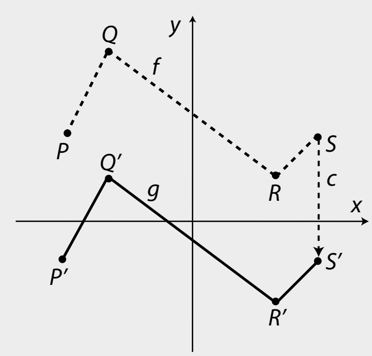
La siguiente propiedad nos dice cómo encontrar, de manera inmediata, la ecuación de la función g correspondiente a un desplazamiento vertical de la gráfica de una función f.

Desplazamiento vertical de la gráfica de una función

Sea $y = f(x)$, y c un número real



Sea c un número positivo.
Al desplazar c unidades hacia *arriba* la gráfica de la función f se obtiene una función g cuya ecuación es $g(x) = f(x) + c$.



Sea c un número positivo.
Al desplazar c unidades hacia *abajo* la gráfica de la función f se obtiene una función g cuya ecuación es $g(x) = f(x) - c$.

Ejemplo 1

En la figura 6, la gráfica que aparece punteada (en el medio), es la de la función valor absoluto $f(x) = |x|$. ¿Cuáles son las ecuaciones correspondientes a las funciones g y h?

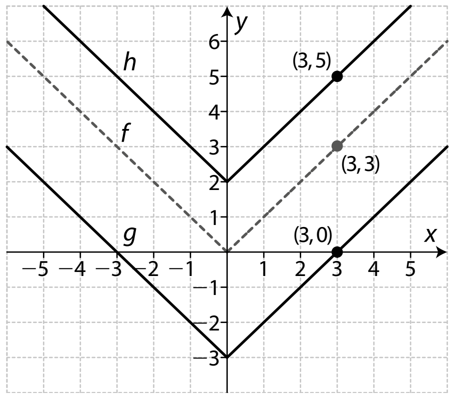


Figura 6

Solución:

- Como la gráfica de h se ha desplazado dos unidades hacia arriba con respecto a la gráfica de f, la ecuación de h es: $h(x) = f(x) + 2 = |x| + 2$.
- La gráfica de g se ha desplazado tres unidades hacia abajo respecto a la gráfica de f, la ecuación de g es: $g(x) = f(x) - 3 = |x| - 3$.

1.5.2. Desplazamientos horizontales

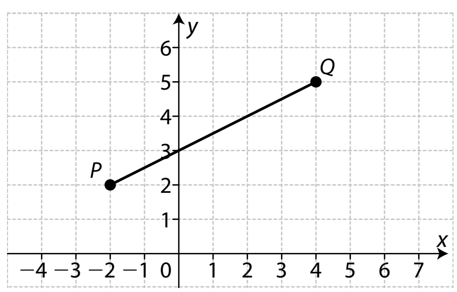


Figura 7

✍ Dibuje en la figura 7 el segmento $P'Q'$ que se obtiene al desplazar tres unidades *hacia la derecha* el segmento PQ.

✍ Determine las coordenadas de P' y de Q'.

✍ Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g.

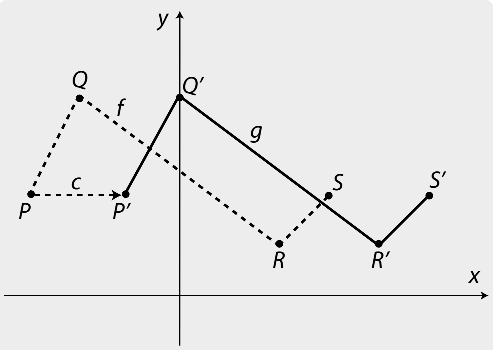
✍ Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:

$$g(x) = f(x - 3)$$

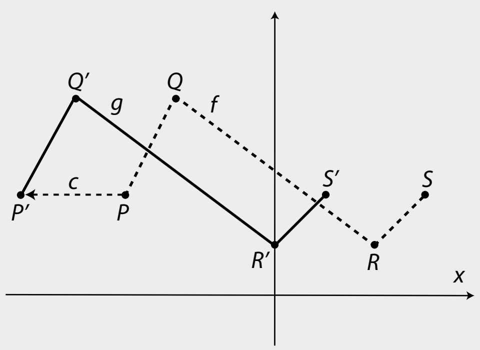
La siguiente propiedad nos dice cómo encontrar de manera inmediata la ecuación de la función g correspondiente a un desplazamiento horizontal de la gráfica de una función f:

Desplazamiento horizontal de la gráfica de una función

Sea $y = f(x)$, y c un número real



Sea c un número positivo. Al desplazar c unidades hacia *la derecha* la gráfica de la función f se obtiene una función g cuya ecuación es $g(x) = f(x - c)$.



Sea c un número positivo. Al desplazar c unidades hacia *la izquierda* la gráfica de la función f se obtiene una función g cuya ecuación es $g(x) = f(x + c)$.

Ejemplo 2

¿Cuáles son las ecuaciones correspondientes a las funciones g y h de la figura 8?

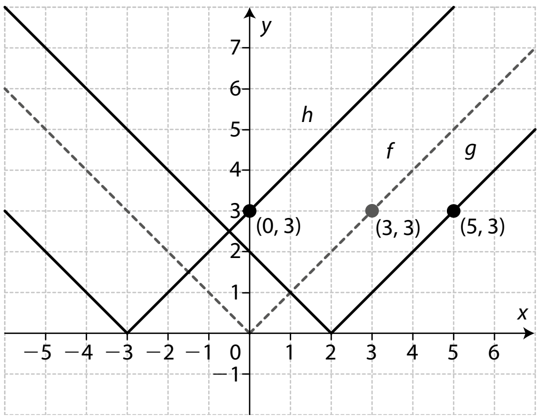


Figura 8

Solución:

- La gráfica de la función g se obtiene desplazando la gráfica de la función f, hacia la derecha dos unidades; luego, la ecuación de g es: $g(x) = f(x - 2) = |x - 2|$.
- La gráfica de la función h se obtiene desplazando la gráfica de la función f, hacia la izquierda tres unidades; por lo tanto, la ecuación de h es: $h(x) = f(x + 3) = |x + 3|$.

1.5.3. Reflexión de una gráfica en los ejes coordenados

Primero **reflejemos** una gráfica en el **eje *x***:

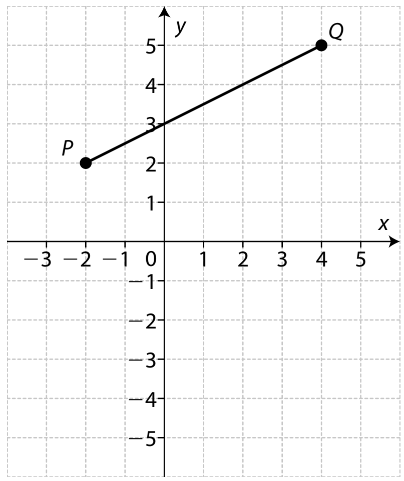


Figura 9

✍ Dibuje en la figura 9 el segmento $P'Q'$ que se obtiene al *reflejar* el segmento PQ en el eje x.

✍ Determine las coordenadas de P' y de Q'.

✍ Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g.

✍ Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:

$$g(x) = -f(x)$$

Ahora **reflejemos** una gráfica en el **eje *y***:

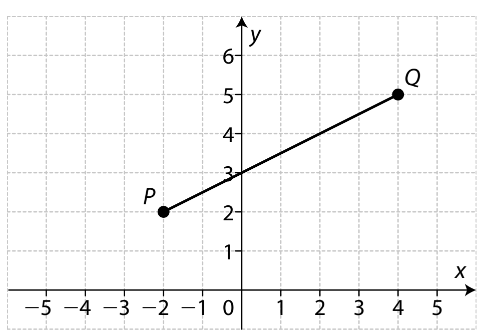


Figura 10

✍ Dibuje en la figura 10 el segmento $P'Q'$ que se obtiene al *reflejar* el segmento PQ en el eje y.

✍ Determine las coordenadas de P' y de Q'.

✍ Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g.

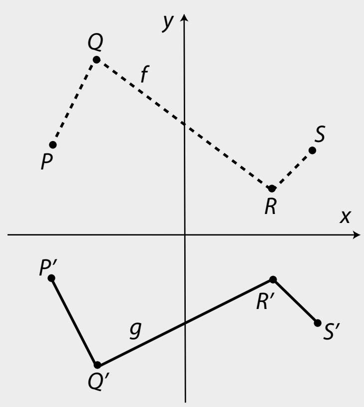
✍ Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:

$$g(x) = f(-x)$$

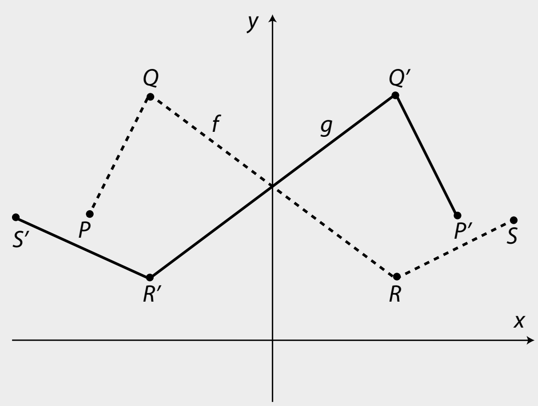
La siguiente propiedad nos indica cómo encontrar de manera inmediata la ecuación de la función g correspondiente a un reflejo en el eje x o en el eje y de la gráfica de una función f.

Reflejo de una gráfica en los ejes coordenados

Sea $y = f(x)$



Al reflejar la gráfica de la función f en el *eje x* se obtiene la gráfica de una función g cuya ecuación es $g(x) = -f(x)$.



Al reflejar la gráfica de la función f en el *eje y* se obtiene la gráfica de una función g cuya ecuación es $g(x) = f(-x)$.

Ejemplo 3

Dada $f(x) = 2x - 3$, graficar las siguientes funciones:

i. $y = -f(x)$ ii. $y = f(-x)$

Solución:

i. La transformación corresponde a una reflexión en el eje x:

$$y = -f(x) = -(2x-3)$$

$$y = -2x + 3$$

Al reflejar la recta $y = 2x - 3$ en el eje x se obtiene la recta $y = -2x + 3$

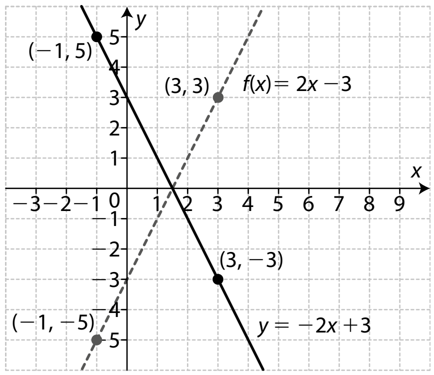


Figura 11

ii. La transformación corresponde a una reflexión en el eje *y*:

$$y = f(-x) = 2(-x) - 3$$

$$y = -2x - 3$$

Al reflejar la recta $y = 2x - 3$ en el eje *y* se obtiene la recta $y = -2x - 3$

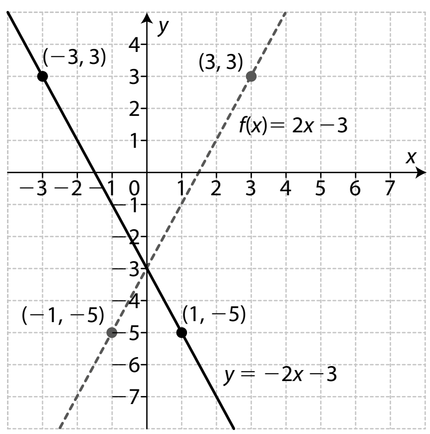


Figura 12

1.5.4. Alargamiento o compresión vertical

Comenzamos con un *alargamiento vertical:*

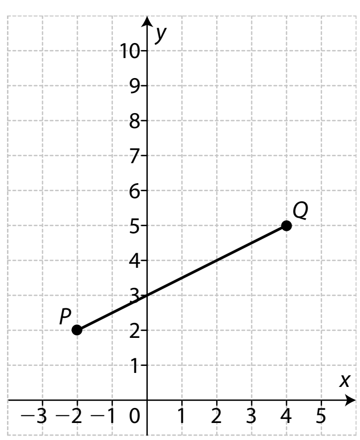


Figura 13

✍ Dibuje en la figura 13 el segmento $P'Q'$ que se obtiene cuando la segunda coordenada de cada punto (o coordenada y) se multiplica por dos.

✍ Determine las coordenadas de P' y de Q'.

✍ Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g.

✍ Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:

$$g(x) = 2\,f(x)$$

Ahora una *compresión vertical*:

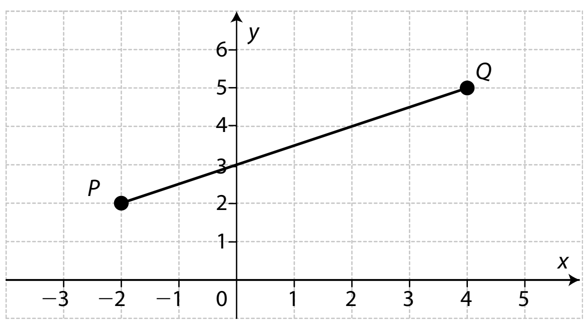


Figura 14

✍ Dibuje en la figura 14 el segmento $P'Q'$ que se obtiene cuando la segunda coordenada de cada punto (o coordenada y) se divide por dos.

✍ Determine las coordenadas de P' y de Q'.

✍ Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g.

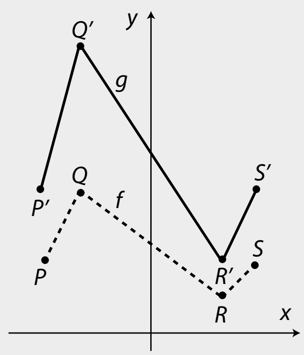
✍ Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:

$$g(x) = \frac{1}{2}\,f(x)$$

La siguiente propiedad nos indica cómo encontrar de manera inmediata la ecuación de la función g correspondiente a un alargamiento o compresión vertical de la gráfica de una función f.

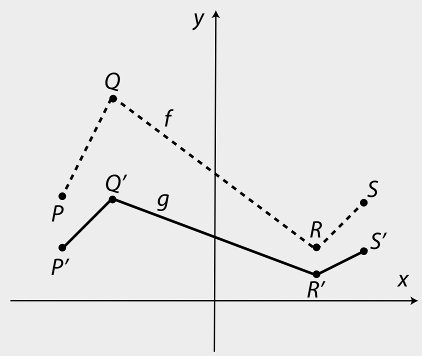
Alargamiento o compresión vertical

Sea $y = f(x)$, y c un número real



Al multiplicar la coordenada y de cada punto de la gráfica de una función f por un número c, $c > 1$, se obtiene la gráfica de una función g cuya ecuación es $g(x) = c\,f(x)$.

La nueva gráfica es un *alargamiento vertical* de la anterior.



Al multiplicar la coordenada y de cada punto de la gráfica de una función f por un número c, $0 < c < 1$, se obtiene la gráfica de una función g cuya ecuación es $g(x) = c\,f(x)$.

La nueva gráfica es un *compresión vertical* de la anterior.

Ejemplo 4

Dada $f(x) = |x|$, graficar las siguientes funciones:

i. $y = 2\,f(x)$ ii. $y = \dfrac{1}{2}\,f(x)$

Solución:

i. La transformación $y = 2\,f(x)$ corresponde a un alargamiento vertical al doble:

$$y = 2\,f(x) = 2\,|x|$$

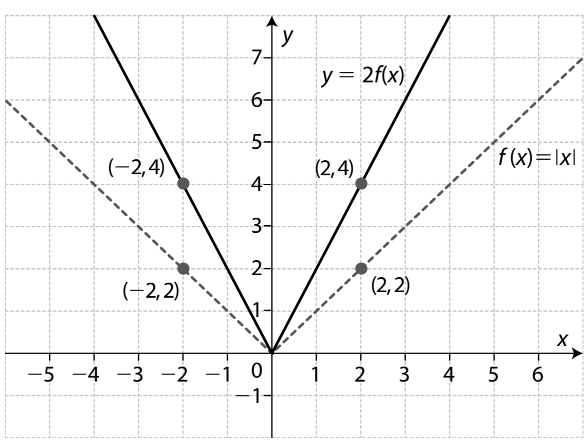


Figura 15

ii. La transformación $y = \frac{1}{2} f(x)$ corresponde a una compresión vertical a la mitad:

$$y = \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} \, |x|$$

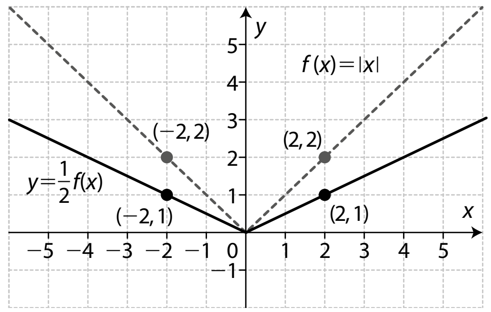


Figura 16

✍ Dada la función $h(x) = -3x + 6$ grafique las siguientes transformaciones:

a) $y = 3\,h(x)$

b) $y = \frac{1}{3}\,h(x)$

1.5.5. Alargamiento o compresión horizontal

Primero un *alargamiento horizontal*:

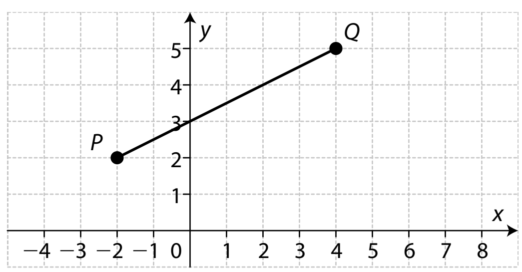


Figura 17

✍ Dibuje en la figura 17 el segmento $P'Q'$ que se obtiene cuando la primera coordenada de cada punto (o coordenada x) se multiplica por dos.

✍ Determine las coordenadas de P' y de Q'.

✍ Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g.

✍ Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:

$$g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Ahora una *compresión horizontal:*

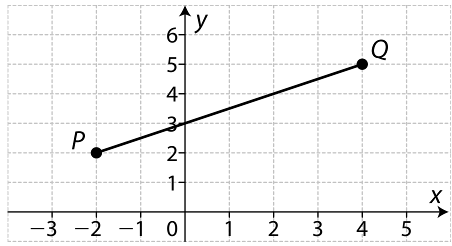


Figura 18

✍ Dibuje en la figura 18 el segmento $P'Q'$ que se obtiene cuando la primera coordenada de cada punto (o coordenada x) se divide por dos.

✍ Determine las coordenadas de P' y de Q'.

✍ Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g.

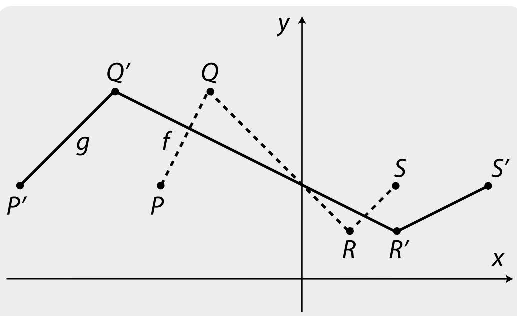
✍ Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:

$$g(x) = f(2x)$$

La siguiente propiedad nos indica cómo encontrar de manera inmediata la ecuación de la función g correspondiente a un alargamiento o compresión horizontal de la gráfica de una función f.

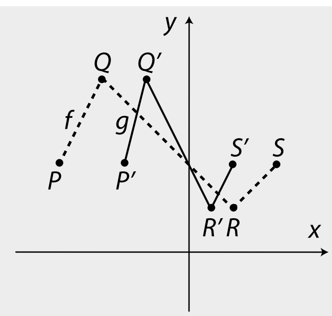
Alargamiento o compresión horizontal

Sea $y = f(x)$, y c un número real



Al multiplicar la coordenada x de cada punto de la gráfica de una función f por un número c, $c > 1$, se obtiene la gráfica de una función g cuya ecuación es $g(x) = f\left(\frac{1}{c}x\right)$.

La nueva gráfica es un *alargamiento horizontal* de la anterior.



Al dividir la coordenada x de cada punto de la gráfica de una función f por un número c, $c > 1$, se obtiene la gráfica de una función g cuya ecuación es $g(x) = f(c\,x)$.

La nueva gráfica es una *compresión horizontal* de la anterior.

Ejemplo 5

Dado $f(x) = |x|$, graficar las siguientes funciones:

i. $y = f(2x)$ ii. $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

Solución:

i. La transformación corresponde a una compresión horizontal a la mitad:

$$y = f(2x) = |2x|$$

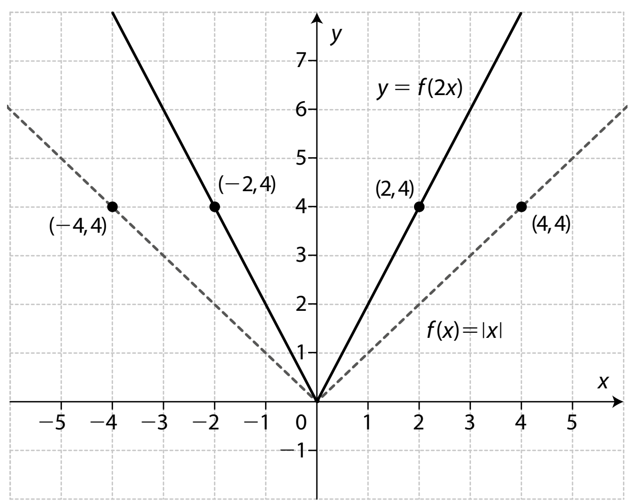


Figura 19

ii. La transformación corresponde a un alargamiento horizontal al doble:

$$y = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left|\frac{1}{2}x\right|$$

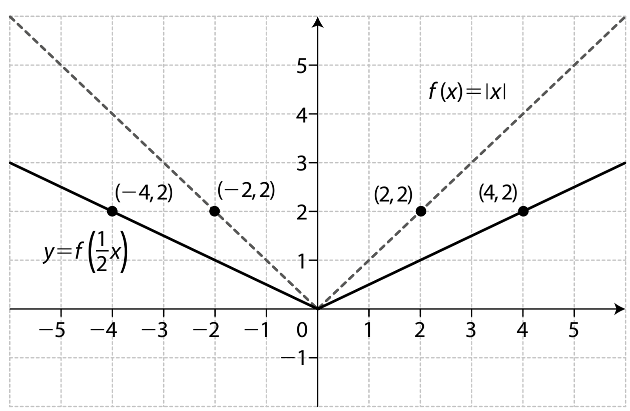


Figura 20

✍ Dada la función $h(x) = 2x - 1$ grafique las siguientes transformaciones:

a) $y = h(3x)$ b) $y = h\left(\frac{1}{3}x\right)$

Conviene familiarizarnos con las gráficas de algunas *funciones básicas*, las cuales se utilizan con bastante frecuencia:

Función constante

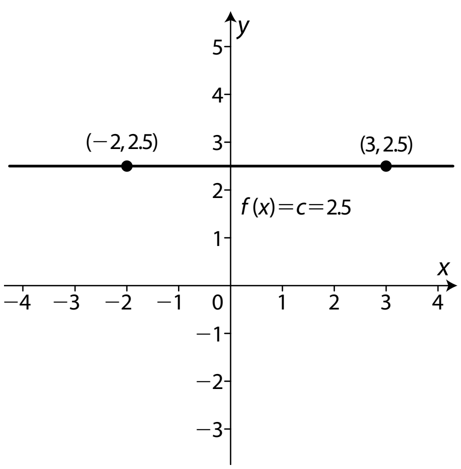


Figura 21

Función idéntica

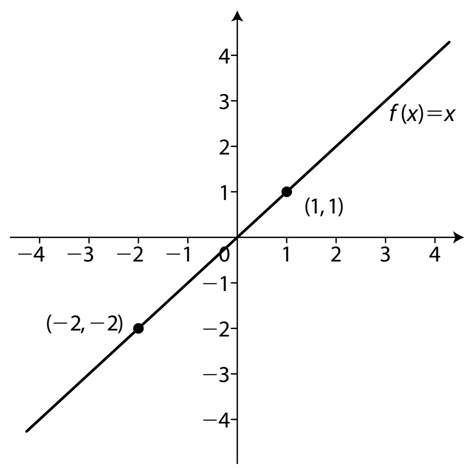


Figura 22

Función cuadrática

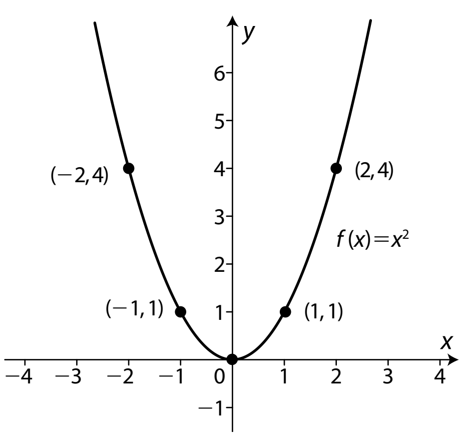


Figura 23

Función cúbica

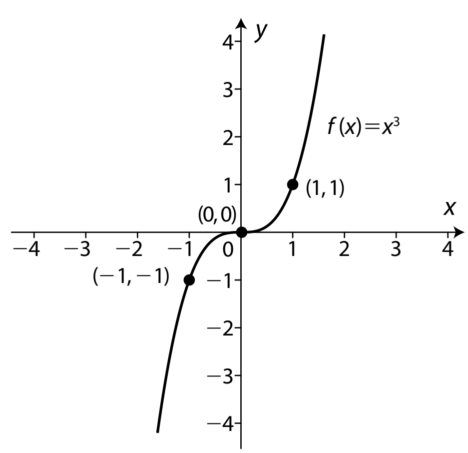


Figura 24

Función raíz cuadrada

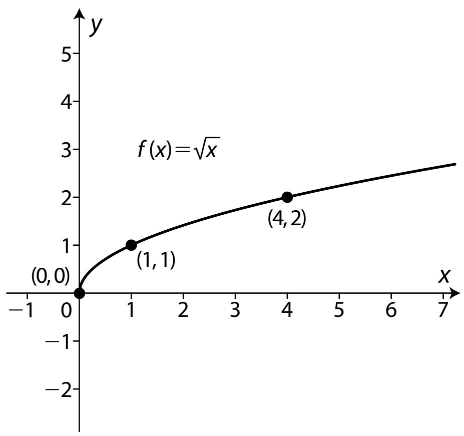


Figura 25

Función valor absoluto

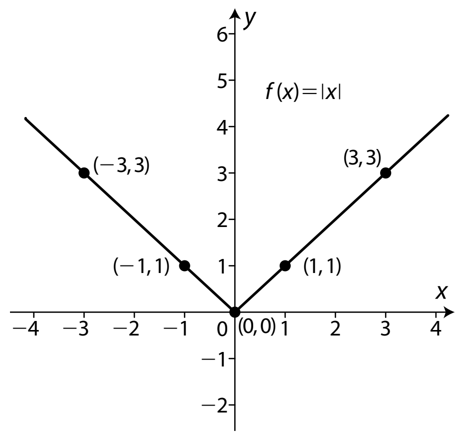


Figura 26

1.5.6. Transformaciones sucesivas

Después de realizada una transformación a la gráfica de una función, se puede realizar otra transformación a la nueva gráfica y así sucesivamente. El orden en que se van realizando las transformaciones está implícito en la escritura, comenzando por lo indicado en el paréntesis.

Ejemplo 6

Describa cómo se puede obtener la gráfica de cada una de las siguientes funciones a partir de la gráfica de la función f.

i. $y = -5f(x-4)+6$

ii. $y = \frac{1}{2}f(-x)-3$

iii. $y = f\left(-\frac{1}{2}x+4\right)$

iv. $y = -3f(-4x-5)-6$

Solución:

i. La gráfica de f se desplaza cuatro unidades hacia la derecha, se alarga verticalmente cinco veces, se refleja en el eje x y finalmente se sube seis unidades.

ii. La gráfica de f se refleja en el eje y, se acorta verticalmente a la mitad y por último se desplaza tres unidades hacia abajo.

iii. La gráfica de f se desplaza cuatro unidades hacia la izquierda, se alarga horizontalmente al doble y finalmente se refleja en el eje y; se puede reflejar primero y luego alargar, y el resultado no cambia.

iv. En este caso están presentes las seis transformaciones vistas; comenzamos por las tres relacionadas con x, y luego las tres relacionadas con y:

La gráfica de f se desplaza cinco unidades hacia la derecha, se refleja en el eje y, se comprime horizontalmente a la cuarta parte, luego se alarga verticalmente al triple, se refleja en el eje x y finalmente se baja seis unidades.

Ejemplo 7

Escriba la ecuación que representa cada paso en la transformación que se indica sobre la función $g(x) = \sqrt{x}$.

i. La gráfica de g se desplaza tres unidades a la izquierda, luego se refleja en el eje x, y finalmente se desplaza hacia abajo cinco unidades.

Solución:

a) La gráfica de g se desplaza tres unidades a la izquierda:

$$g_1(x) = g(x+3) = \sqrt{x+3}$$

b) Luego se refleja en el eje x:

$$g_2(x) = -g_1(x) = -g(x+3) = -\sqrt{x+3}$$

c) Finalmente se desplaza hacia abajo 5 unidades:

$$g_3(x) = g_2(x)-5 = -g_1(x)-5 = -g(x+3)-5 = -\sqrt{x+3}-5$$

Luego la función que se obtiene es: $\mathbf{y = -\sqrt{x+3} - 5}$

ii. La gráfica de g se desplaza seis unidades a la derecha, luego se refleja en el eje y, se comprime horizontalmente a la cuarta parte, después se refleja en el eje x, se alarga verticalmente al doble y finalmente se desplaza hacia arriba una unidad.

Solución:

Siguiendo el proceso anterior, paso a paso, se obtienen las siguientes expresiones:

a) La gráfica de g se desplaza seis unidades a la derecha: $y = g(x-6) = \sqrt{x-6}$

b) Luego se refleja en el eje y: $y = g(-(x)-6) = g(-x-6) = \sqrt{-x-6}$

c) Se comprime horizontalmente a la cuarta parte: $y = g(-4x-6) = \sqrt{-4x-6}$

d) Luego se refleja en el eje x: $y = -g(-4x-6) = -\sqrt{-4x-6}$

e) Se alarga verticalmente al doble: $y = -2g(-4x-6) = -2\sqrt{-4x-6}$

f) Finalmente se desplaza hacia arriba una unidad:

$$y = -2g(-4x-6)-1 = -2\sqrt{-4x-6}+1$$

Luego la función que se obtiene es: $\mathbf{y = -2\sqrt{-4x-6} + 1}$

Ejemplo 8

$\boldsymbol{y} = -2f(x-3) + 1$ indica la siguiente sucesión de transformaciones: desplazamiento de tres unidades a la derecha, alargamiento vertical al doble, reflejo en el eje x, y finalmente, desplazamiento vertical de una unidad hacia arriba (similar al orden en que se realizan las operaciones aritméticas).

Ilustremos lo anterior para el caso de la función $f(x) = x^2$ (distinguiremos las gráficas intermedias de la última dibujando estas con líneas interrumpidas y esta última con línea continua). Señalamos con un número cada gráfica para indicar el orden en que vamos realizando las transformaciones.

Para facilitar el trazado hemos escogido tres puntos de referencia: $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$; seguimos la pista a los correspondientes puntos que se obtienen con cada transformación para trazar cada parábola:

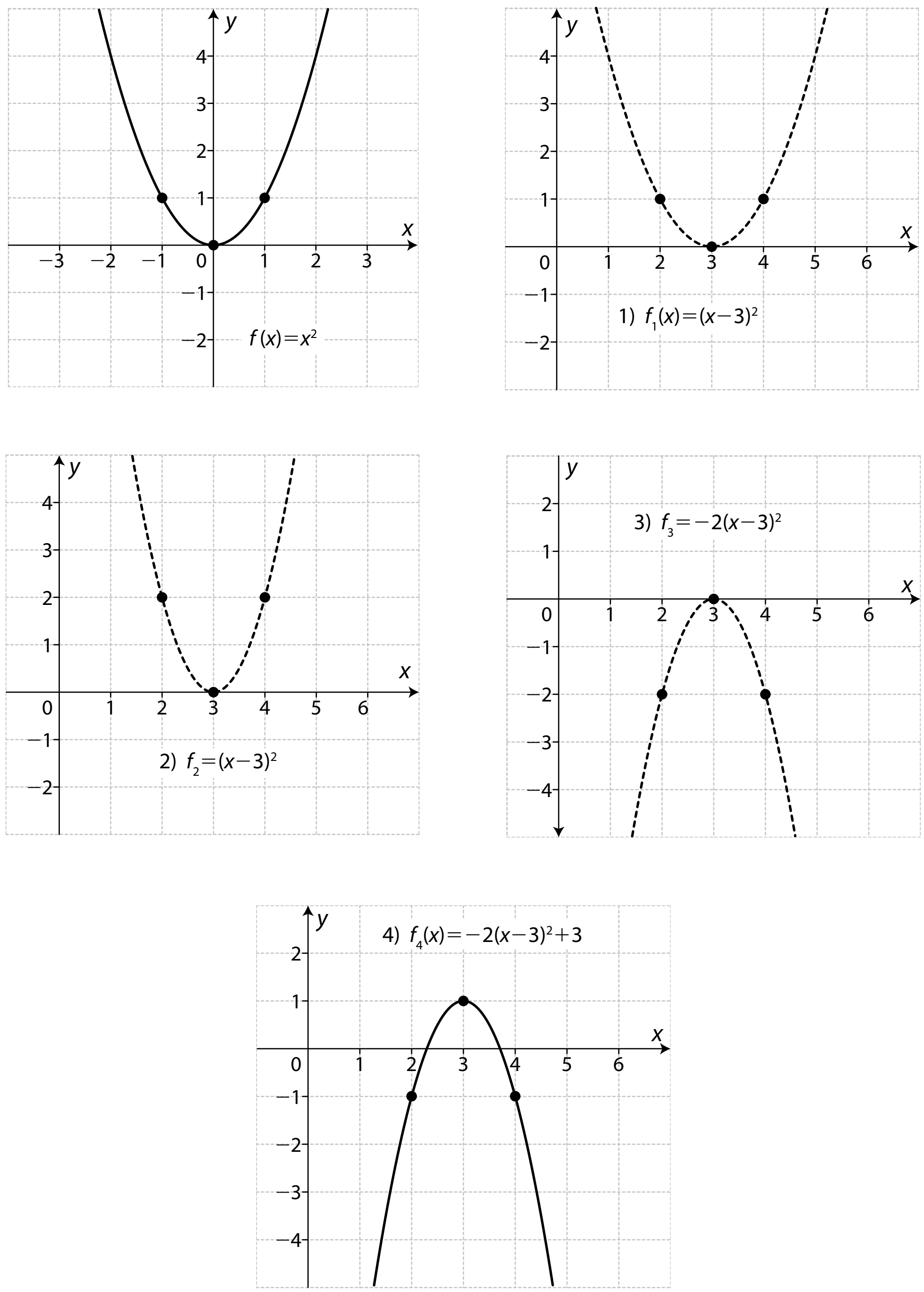


Figura 27

En un solo plano cartesiano:

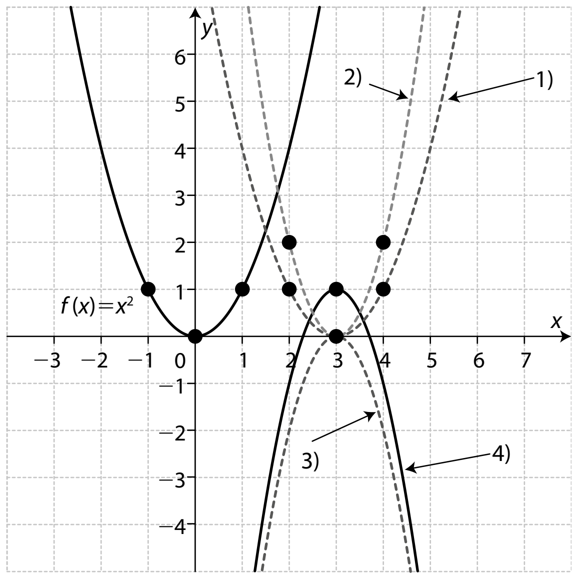


Figura 28

✍ En la tabla se presentan transformaciones particulares de una función. Descríbalas verbalmente.

	Para trazar la gráfica de	a la gráfica de la función $y = f(x)$, tenemos que
1	$y = f(x) + 2$	desplazar dos unidades hacia arriba
2	$y = f(x) - 2$	
3	$y = f(x + 2)$	
4	$y = f(x - 2)$	
5	$y = -f(x)$	
6	$y = f(-x)$	
7	$y = 2f(x)$	
8	$y = \frac{1}{2} f(x)$	
9	$y = f(2x)$	
10	$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$	

Tabla 1

RESUMEN

✍ Elabore una tabla resumen de las transformaciones estudiadas en esta sección: si conocemos la gráfica de $y = f(x)$,

	Para trazar la gráfica de	**a la gráfica de la función $y = f(x)$, tenemos que**
1	$y = f(x) + c$	desplazar c unidades hacia **arriba**, si $c > 0$ y c unidades hacia **abajo** si $c < 0$
2	$y = f(x + c)$	
3	$y = -f(x)$	
4	$y = f(-x)$	
5	$y = cf(x)$	
6	$y = f(cx)$	

Tabla 2

EJERCICIOS

I. Suponga que se da la gráfica de una función f. Describa cómo se puede obtener la gráfica de cada una de las siguientes funciones a partir de la gráfica de f:

1) $y = f(x - 8)$ ____________________

2) $y = f(x) + 7$ ____________________

3) $y = -f(x + 6)$ ____________________

4) $y = f(2x) - 5$ ____________________

5) $y = f(x + 11) - 2$ ____________________

6) $y = -\frac{1}{2} f(x - 4)$ ____________________

7) $y = -3f(-x) + 1$ ____________________

8) $y = f\left(\frac{1}{4}x\right) - 8$ ____________________

II. Se da la descripción verbal de las transformaciones que se realizan a partir de la gráfica de cada función. Haga la gráfica y escriba la ecuación que representa dichas transformaciones:

1) Función: $y = x^2$; desplazar dos unidades a la izquierda, reflejar en el eje x y bajar seis unidades.

2) Función: $y = |x|$; reflejar en el eje x, alargar verticalmente al triple y subir dos unidades.

3) Función: $y = x^3$; reflejar en el eje y, acortar verticalmente a la mitad y reflejar en el eje x.

4) Función: $y = \sqrt{x}$; desplazar tres unidades a la derecha, reflejar en el eje x, alargar verticalmente cuatro veces y subir siete unidades.

5) Función: $y = x^2$; desplazar cinco unidades a la izquierda, alargar horizontalmente al doble, reflejar en el eje x, y bajar ocho unidades.

6) Función: $y = |x|$; desplazar cuatro unidades a la derecha, reflejar en el eje y, comprimir horizontalmente a la tercera parte, alargar al doble verticalmente, reflejar en el eje x, y finalmente subir nueve unidades.

III. Describa cómo se puede obtener la gráfica de cada función a partir de una de las gráficas de las funciones básicas (figuras 21 a 26 de esta sección).

1) $h(x) = (x + 3)^2 - 6$

2) $g(x) = -3x + 1$

3) $f(x) = -\sqrt{x - 5} + 4$

4) $q(x) = -4|x - 2|$

5) $n(x) = -(3x + 6)^2 - 2$

6) $p(x) = -\sqrt{-x + 2} + 4$

7) $m(x) = -2\left(-\frac{1}{4}x\right)^3 - 5$

8) $t(x) = -\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}x + 3\right| + 1$

IV. La gráfica de la función g se muestra a continuación:

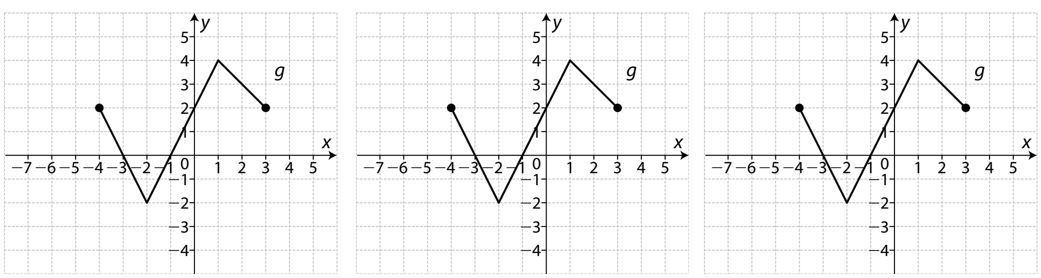


Figura 29

Trace la gráfica de las siguientes funciones (seleccione 3, incluida la #6):

1) $f(x) = -g(x + 3)$

2) $f(x) = \frac{1}{2}g(x) - 3$

3) $f(x) = -g(-x) + 3$

4) $f(x) = -2g(x - 3) + 2$

5) $f(x) = -g(-x + 2) - 1$

6) $f(x) = -\frac{1}{2}g(-2x) + 1$

V. El punto $P = (4, -5)$ está en la gráfica de $y = f(x)$; en qué punto se transforma P de acuerdo con cada transformación:

1) $y = 3f(-x)$

2) $y = f(x + 4) + 2$

3) $y = -f(-4x) + 5$

4) $y = -2f(3x - 2) - 5$

VI. La gráfica de la función $f(x) = |x|$ pasa por los puntos $(-2, 2)$, $(0, 0)$, $(3, 3)$. ¿Con qué transformación la gráfica que se obtiene pasa respectivamente por los puntos $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(5, 0)$?

VII. Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x$, $m(x) = |x|$ y $p(x) = x^3$. Halle la ecuación correspondiente a cada una de las siguientes transformaciones.

1) $y = 2f(x + 1)$

2) $y = g(x - 1) + 3$

3) $y = m(2x) - 3$

4) $y = -4h(x - 2)$

5) $y = \frac{1}{2}p(x - 1) + 5$

6) $y = -f\left(-\frac{1}{2}x\right) + 3$

7) $y = \frac{1}{3}h(-4x) - 1$

8) $y = -2m(x + 4) + 1$

9) $y = -2p(x + 6) - 4$

10) $y = -2g(3x) - 7$

VIII. En la figura 30 se muestra la gráfica de $y = f(x)$. Relacione cada una de las ecuaciones con su gráfica:

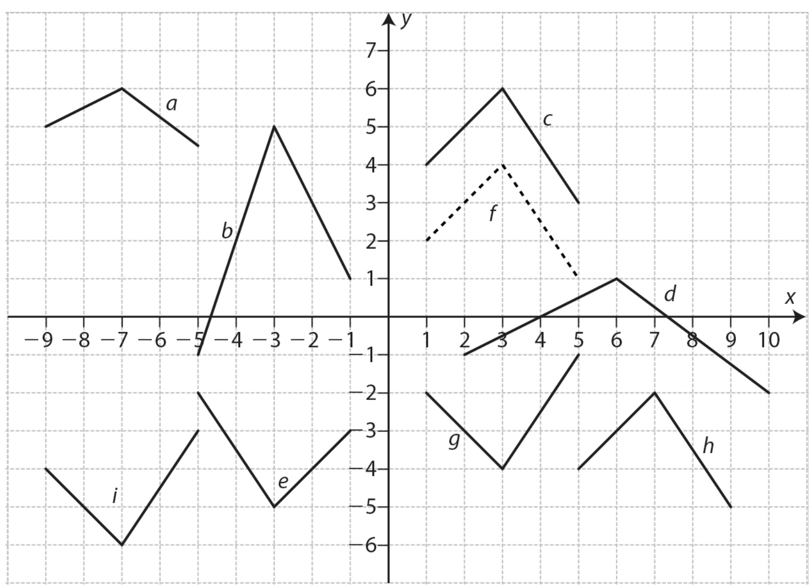


Figura 30

1) $y = f(x) + 2$ ( )

2) $y = -f(x)$ ( )

3) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right) - 3$ ( )

4) $y = \frac{1}{2}f(x + 10) + 4$ ( )

5) $y = f(x - 4) - 6$ ( )

6) $y = 2f(-x) - 3$ ( )

7) $y = -f(-x) - 1$ ( )

8) $y = -f(x + 10) - 2$ ( )

IX. Trace la gráfica de cada función:

1) $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

2) $g(x) = (x + 4)^3 - 3$

3) $h(x) = -\sqrt{x + 2}$

4) $m(x) = -|x| + 2$

5) $n(x) = -2(x - 4)^3$

6) $p(x) = -\sqrt{-x} + 2$

7) $q(x) = -\dfrac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$

8) $r(x) = -\dfrac{1}{2}|x + 1| - 3$

X. Exprese la función g en términos de la función f:

1)

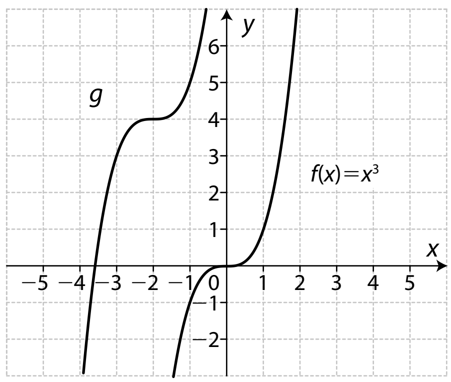


Figura 31

3)

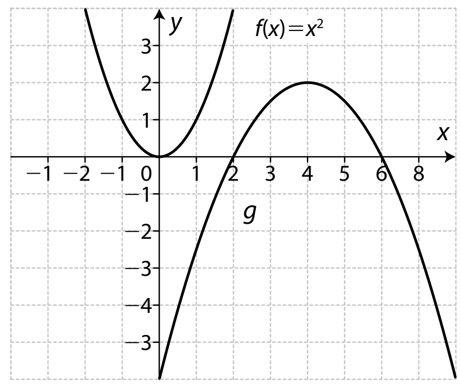


Figura 32

2)

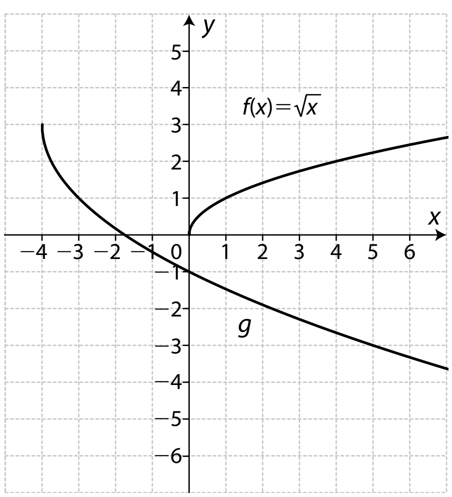


Figura 33

4)

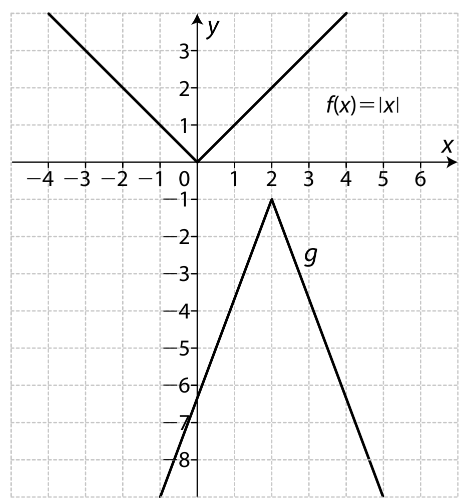


Figura 34

1.6. Operaciones con funciones

✍ Se tiene una caja cuyas dimensiones se muestran en la figura 1. El cm^2 de material que se utiliza para construir las caras laterales cuesta \$5 mientras que el de la base o la tapa cuesta \$6.

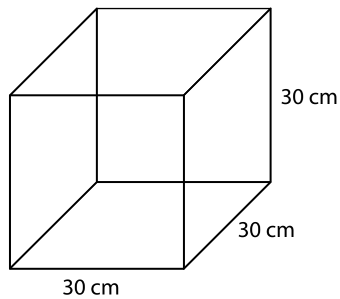


Figura 1

1. ¿Cuál es el costo del material, C_l, utilizado para construir las caras laterales?

2. ¿Cuál es el costo del material, C_B, para la base y la tapa?

3. ¿Cuál es el costo total del material, C, para toda la caja?

✍ Consideremos una caja cúbica de arista x (figura 2) con los costos de materiales como en la actividad anterior.

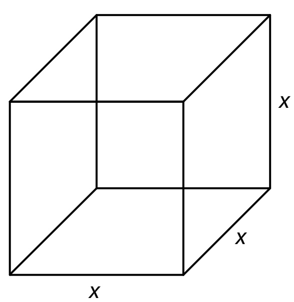


Figura 2

4. Exprese C_l en función de x.
5. Expresa C_B en función de x.
6. Exprese C en términos de las funciones C_l y C_B.
7. Exprese C en función de x.

Con las funciones C_l y C_B de la actividad anterior se definió una nueva función C que es la suma de ellas: $C = C_l + C_B$. En general, si se tienen dos funciones f y g, la ***función suma*** de ellas, escrita $f + g$, la definimos sumando las expresiones algebraicas de f y g.

Por ejemplo, si: $f(x) = 5x - 1$, $g(x) = -2x + 3$, definimos $f + g$ así:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (5x-1) + (-2x+3)\\ &= 3x + 2\end{aligned}$$

Ejemplo

Dadas las funciones $h(x) = 3x + 5$, y $t(x) = \sqrt{x+4}$, halle:

i. $(h+t)(5)$

ii. $(h+t)(-8)$

Solución:

i. $(h+t)(5) = h(5) + t(5) = (3(5) + 5) + \sqrt{5+4} = 20 + 3 = 23$

ii. Observemos que en este caso $h(-8) = 3(-8) + 5 = -19$, pero, $t(-8) = \sqrt{-8+4} = \sqrt{-4}$, no es un número real. En este caso, al no estar definida t en -8, tampoco queda definida $(h+t)$ en -8.

En el ejemplo anterior determinamos primero el dominio de las funciones h y g; h está definida en los números reales, o sea en el intervalo $(-\infty, \infty)$, mientras que t lo está para los números reales mayores o iguales que -4, o sea en el intervalo $[-4, \infty)$.

La función $h + t$ queda definida solamente para aquellos valores en los cuales h y t están definidas simultáneamente, es decir, en la intersección de sus dominios:

$$dom\ h = (-\infty, \infty) \qquad dom\ t = [-4, \infty)$$

$$dom\ (h+t) = dom\ h \cap dom\ t = (-\infty, \infty) \cap [-4, \infty) = [-4, \infty).$$

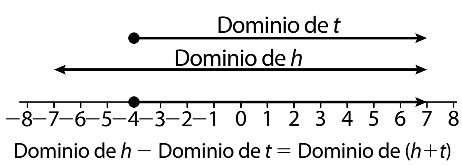


Figura 3

Volviendo a las funciones $f(x) = 5x - 1$, $g(x) = -2x + 3$, conseguimos con ellas otras funciones: la ***función resta***, $f - g$, la ***función multiplicación***, fg y la ***función división***, $\frac{f}{g}$, efectuando las operaciones respectivas:

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (5x-1) - (-2x+3)\\ &= 5x - 1 + 2x - 3\\ &= 7x - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f\,g)(x) &= f(x)g(x)\\ &= (5x-1)(-2x+3)\\ &= -10x^2 + 15x + 2x - 3\\ &= -10x^2 + 17x - 3\end{aligned}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{5x-1}{-2x+3}$$

Las funciones anteriores se definen en la intersección de los dominios, con la salvedad de que para la división hay que excluir aquellos valores de x donde el denominador se hace cero (en este ejemplo: $x \neq \frac{3}{2}$).

✍ Si $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^2 - 3x$, encuentre $f + g$, $g - f$, fg, $\frac{f}{g}$, el dominio de cada operación y luego calcule:

a) $(f + g)(-3) =$

b) $(g - f)(0) =$

c) $(fg)(2) =$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(-1) =$

e) $(gf)(3b) =$

f) $(g - f)(a + 1) =$

Operaciones con funciones

Dadas las funciones f y g, determinamos primero el dominio de cada una y definimos con ellas las funciones, *suma, resta, multiplicación* y *división*, denotadas respectivamente, $f + g$, $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$, así:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Estas tienen como dominio la intersección de los dominios de f y de g, esto es: *dom* $f \cap$ *dom* g; en la división excluimos en el dominio los valores de x para los cuales $g(x) = 0$

EJERCICIOS

I. Dadas las funciones $g(x) = 2x - 3$ y $h(x) = \frac{5}{2}x + 3$, halle:

1) $(h + g)(4)$

2) $(g - h)(-3)$

3) $(hg)(-2)$

4) $\left(\frac{g}{h}\right)(0)$

5) $(g + h)(t + 1)$

6) $(gh)(2a)$

II. Dadas las gráficas de las funciones h y g, halle el dominio y rango de cada una de ellas y estime:

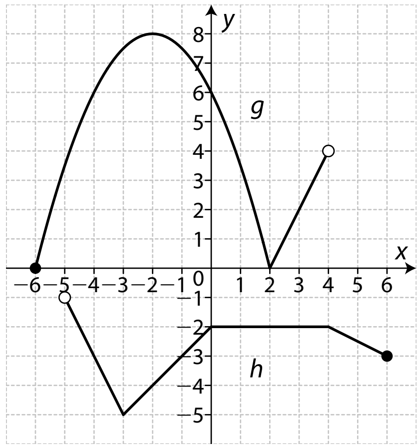


Figura 4

1) $(h+g)(-1)$
2) $(g-h)(4)$
3) $(hg)(-2)$
4) $\left(\dfrac{g}{h}\right)(0)$
5) $(g+h)(-6)$
6) $(h-g)(-3)$
7) $(gh)(0)$
8) $\left(\dfrac{h}{g}\right)(-4)$
9) $(g+h)(2)$
10) $(h-g)(-5)$

III. Con la información de la tabla que se muestra a continuación, evalúe la función indicada para f y g.

x	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	0	2	4	5
$f(x)$	-4	3	$\frac{1}{2}$	2	-5	0	$\frac{3}{4}$
$g(x)$	5	-7	4	$-\frac{3}{2}$	-2	-4	$\frac{5}{4}$

1) $(f-g)\left(-\dfrac{3}{2}\right)$
2) $(g-f)(5)$
3) $(gf)(0)$
4) $(g+f)(4)$
5) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(2)$
6) $(f+g)(-1)$
7) $(fg)(-3)$
8) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(-1)$

IV. Encuentre $f+g, f-g, fg, \dfrac{f}{g}$.

1) $f(x) = 2x + 5,\qquad g(x) = -3x + 2$
2) $f(x) = -\dfrac{4}{3},\qquad g(x) = \dfrac{2}{3}x + 4$
3) $f(x) = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{2}{5},\qquad g(x) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{8}{5}$

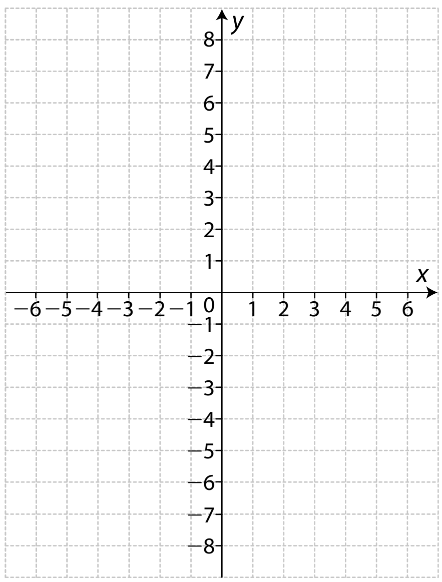
V. Halle $f+g$, $f-g$, $h+m$, $h-m$ y el dominio de cada una:

1) $f(x) = -x + 2$, si $-2 \leqslant x \leqslant 4$ $\qquad$ $g(x) = 2x - 1$, si $-2 \leqslant x \leqslant 4$

2) $h(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1$, si $-2 \leqslant x < 8$ $\qquad$ $m(x) = \dfrac{3}{2}x - 2$, si $-4 \leqslant x \leqslant 6$

VI. Represente gráficamente, en el mismo plano, las funciones del ejercicio anterior y trace la gráfica que se indica en cada caso.

1) $f+g$



2) $f-g$

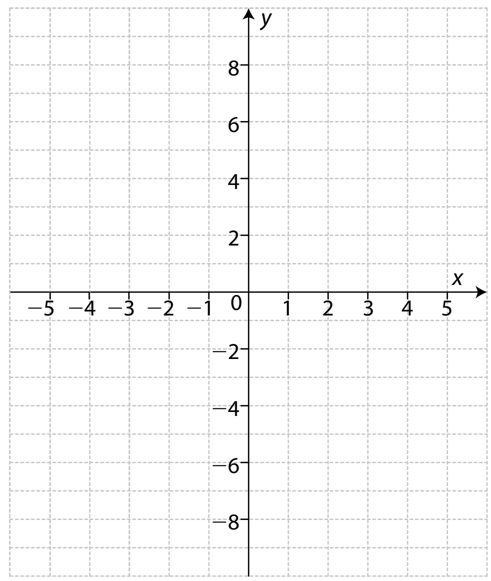
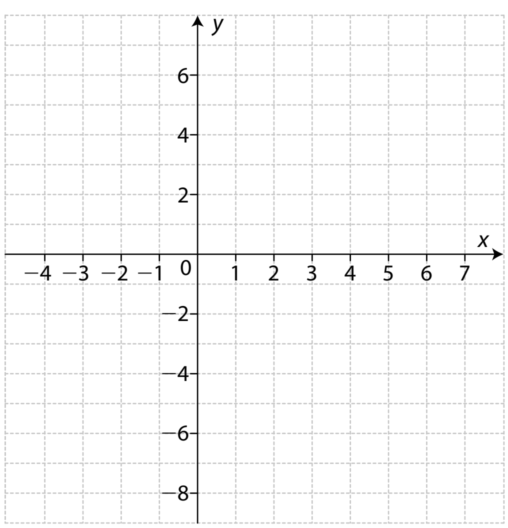


Figura 5

3) $h+m$



4) $h-m$

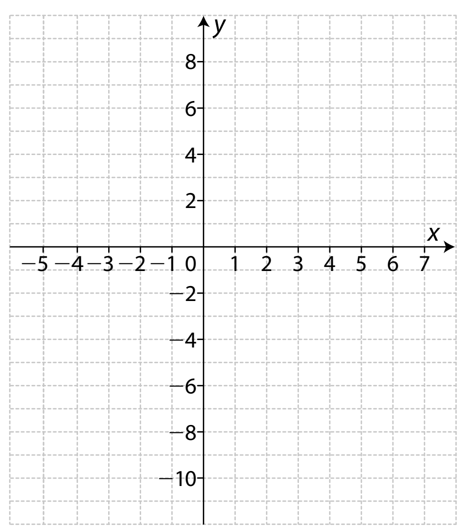


Figura 6

VII. Utilice las gráficas de las funciones f y g, para trazar la gráfica de $f + g$ y $f - g$.

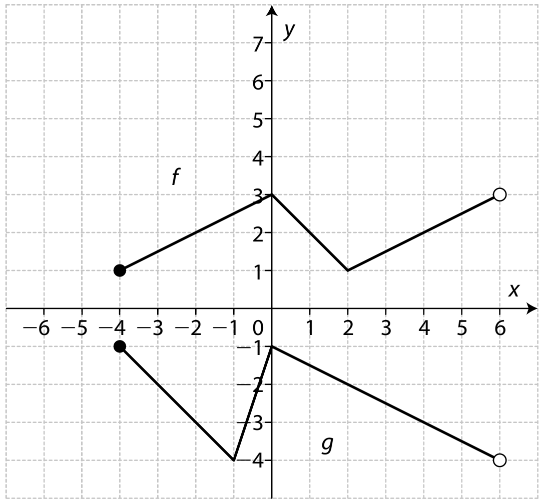


Figura 7

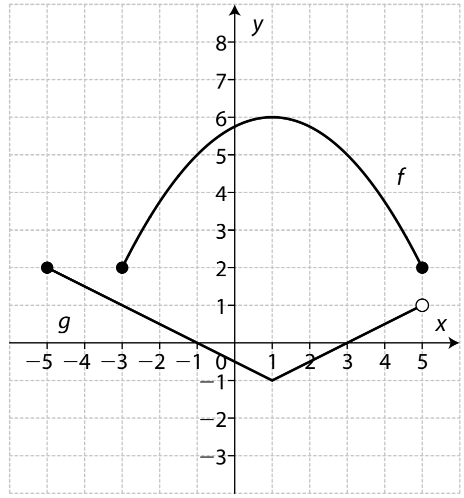


Figura 8

1.7. Composición de funciones

En la vida real encontramos situaciones en donde una variable depende de otra y esta a su vez depende de otra variable. Consideremos por ejemplo las escalas de temperatura Fahrenheit, Celsius y Kelvin. La fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ indica cómo convertir grados Fahrenheit (F) a grados Celsius (C); por otra parte, la fórmula $K = C + 273$ nos dice cómo convertir grados Celsius a grados Kelvin (K).

✍ ¿A cuántos grados Celsius equivale una temperatura de 68 grados Fahrenheit?

✍ ¿A cuántos grados Kelvin equivale una temperatura de 32 grados Celsius?

✍ ¿A cuántos grados Kelvin equivale una temperatura de 50 grados Fahrenheit?

Consideremos las funciones f y g, descritas verbalmente así:

"f es la función que multiplica por dos y luego suma ocho"

"g es la función que multiplica por tres y luego resta catorce"

✍ Defina algebraicamente las funciones f y g:

Imaginemos las funciones f y g como máquinas, formando un mecanismo como el de la figura 1, en el cual al ingresar un valor como el 1 en la máquina f, esta lo transforma en: $2 \times (1) + 8 = 10$. El 10 a su vez es recibido por la máquina g la cual lo convierte en: $3 \times 10 - 14 = 30 - 14 = 16$.

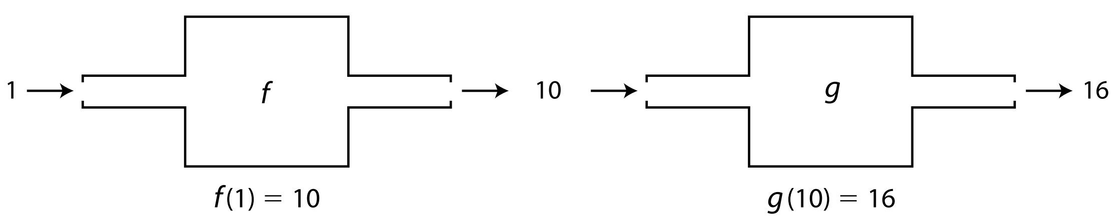


Figura 1

Si ingresamos el 6 en la máquina f, esta lo transforma en 20, es decir, $f(6) = 20$; enseguida, la función g convierte a 20 en 46, es decir, $g(20) = 46$.

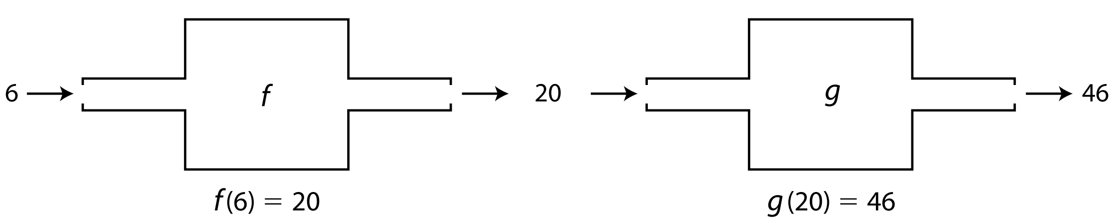


Figura 2

✍ Complete la tabla 1:

	f		g	
1	→	10	→	16
6	→	20	→	46
4	→		→	
11	→		→	
	→	-2	→	
	→		→	34
$\frac{3}{2}$	→		→	
$-\frac{5}{6}$	→		→	

Tabla 1

Ahora construiremos una sola máquina que remplace el mecanismo anterior; esta máquina tendrá que transformar el 1 en 16, el 6 en 46, etc.

Ejemplo 1

Indique cómo programar la máquina que remplace el mecanismo descrito al comienzo de esta sección y verifique el procedimiento con los valores de entrada 1 y 6.

Solución:

Expresamos primero en lenguaje algebraico lo que hacen las funciones f y g:

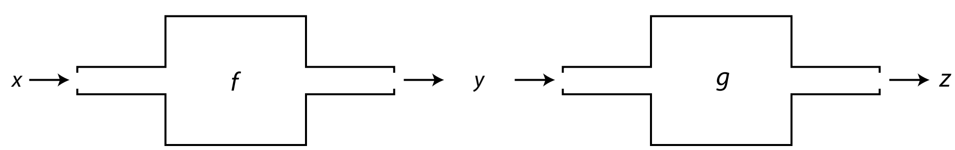


Figura 3

donde $y = 2x + 8$ (1)

$z = 3y - 14$ (2)

Remplazamos y de la ecuación (1) en la ecuación (2):

$$z = 3(2x + 8) - 14$$

$$z = 6x + 24 - 14$$

$$\boldsymbol{z = 6x + 10}$$

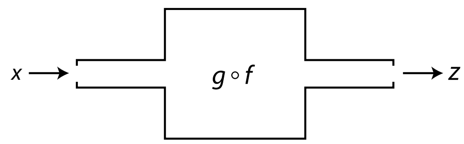
Lo anterior indica que la máquina buscada, debe primero *multiplicar* por 6 y luego *sumar* 10.

Verificamos que al 1 le asigna el 16, al 6 el 46, etc.

$$1 \rightarrow 6(1) + 10 = 16$$

$$6 \rightarrow 6(6) + 10 = 46$$

A la máquina o función del ejemplo 1 llamaremos la *función compuesta* de g y f, la cual denotamos $g \circ f$:



$(g \circ f)(x) = 6x + 10$

Figura 4

Composición de funciones

La **función compuesta** $f \circ g$, de dos funciones f y g se define:

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

Ejemplo 2

A partir de las fórmulas $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, $K = C + 273$, que permiten convertir grados Fahrenheit (F) a grados Celsius (C), y grados Celsius a grados Kelvin (K), respectivamente, consiga una fórmula para convertir grados Fahrenheit a grados Kelvin.

Solución:

La figura 5 muestra que estamos tratando de construir un "puente" que vaya de F a K:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "?"'] & C \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

Figura 5

Expresemos las fórmulas con la notación funcional:

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32), \qquad K(C) = C + 273$$

La fórmula que se busca corresponde a la composición de las funciones K y C:

$$
\begin{aligned}
(K \circ C)(F) &= K(C(F)) = K\left(\frac{5}{9}(F-32)\right) \\
&= \frac{5}{9}(F-32) + 273 \\
&= \frac{5}{9}(F) - \frac{5}{9}(32) + 273 \\
&= \frac{5F+2297}{9} \\
\boldsymbol{(K \circ C)(F)} &= \boldsymbol{\frac{5}{9}F + \frac{2297}{9}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3

Dadas las funciones $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{2x-1}$, halle $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ f$. Determine los dominios de cada una de las composiciones.

¿Es $(f \circ g)(5)$ igual a $(g \circ f)(5)$?

Solución:

i. Dominio de f: $(-\infty,\infty)$

Dominio de g: $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f\left(\sqrt{2x-1}\right) \\
&= 2\sqrt{2x-1} + 3
\end{aligned}
$$

Esta función está definida para los x tales que $2x - 1 \geqslant 0$, o sea, para $x \geqslant \frac{1}{2}$; por tanto, el dominio de $f \circ g$ es $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$.

ii.
$$
\begin{aligned}
(f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\
&= f(2x+3) \\
&= 2(2x+3) + 3 \\
&= 4x + 6 + 3 \\
(f \circ f)(x) &= 4x + 9
\end{aligned}
$$

El dominio de $f \circ f$ es $(-\infty,\infty)$

iii.
$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(2x+3) \\
&= \sqrt{2(2x+3)-1} \\
(g \circ f)(x) &= \sqrt{4x+5}
\end{aligned}
$$

Esta función está definida para los x tales que $4x + 5 \geqslant 0$, o sea, para $x \geqslant -\dfrac{5}{4}$; por tanto, el dominio de $g \circ f$ es $\left[-\dfrac{5}{4}, \infty\right)$

iv. ¿Es $(f \circ g)(5)$ igual a $(g \circ f)(5)$?

$(f \circ g)(5) = 2\sqrt{2(5)-1} + 3 = 2(3) + 3 = 9$

$(g \circ f)(5) = \sqrt{4(5)+5} = \sqrt{25} = 5$

Observamos que $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(5) \neq (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\mathbf{5})$

> En general, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ lo cual significa que el proceso de *composición de funciones* ***no es conmutativo***.

✍ Dadas las funciones $m(t) = -t^2 + 2$ y $p(t) = \sqrt{5 - 2t}$, halle:

a) $(m \circ p)(2)$

b) $(m \circ p)\left(\dfrac{5}{2}\right)$

c) $(p \circ m)(2)$

d) $(m \circ p)(-10)$

e) $(m \circ m)(-4)$

f) $(p \circ m)(-3)$

g) $(p \circ p)\left(\dfrac{1}{2}\right)$

h) $(p \circ m)(0)$

i) $(p \circ m)(1)$

j) $(m \circ p)(1)$

Ejemplo 4

Dadas las gráficas de las funciones f y g que se muestran en la figura 6, halle $(f \circ g)(-1)$, $(g \circ g)(0)$.

Solución:

i. $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 5$

ii. $(g \circ g)(0) = g(g(0)) = g(-4) = 0$

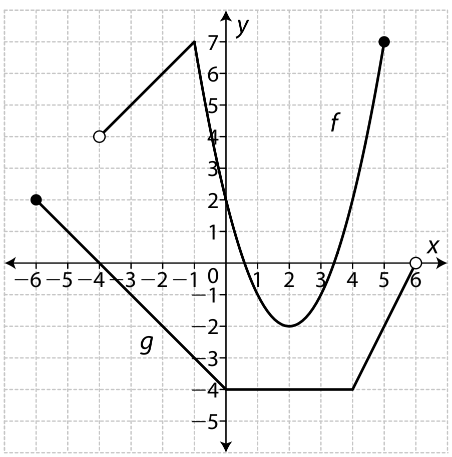


Figura 6

✍ Utilice las gráficas de las funciones *f* y *g*, de la figura 6, para hallar:

a) $(g \circ f)(-3)$

b) $(f \circ g)(-3)$

c) $(f \circ f)(3)$

d) $(f \circ g)(2)$

e) $(g \circ g)(-6)$

Ejemplo 5

Exprese la función $h(x) = (4x - 5)^3$ como composición de dos funciones.

Solución:

Consideremos la función *h* como el resultado del siguiente proceso: realizar primero lo que está en el paréntesis y luego elevar al cubo. La primera parte la representamos con la función $g(x) = 4x - 5$ y la segunda parte con la función $f(x) = x^3$. Por tanto:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x - 5) = (4x - 5)^3$$

y así: $h(x) = (f \circ g)(x)$, con $g(x) = 4x - 5$, $f(x) = x^3$

✍ Si $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, exprese *h* como la composición de dos funciones. Determine el dominio de cada una.

Ejemplo 6

Un globo se eleva verticalmente desde el piso con una velocidad de 40 m/min. El globo está siendo monitoreado desde un punto ***P*** a 120 m del punto de partida *Q*. Sea *d* la distancia del punto ***P*** al globo y *t* el tiempo, en minutos, desde que empezó a elevarse. Exprese *d* como una función de *t*. ¿A qué distancia se encuentra el globo del punto ***P***, transcurridos 4 minutos?

Solución:

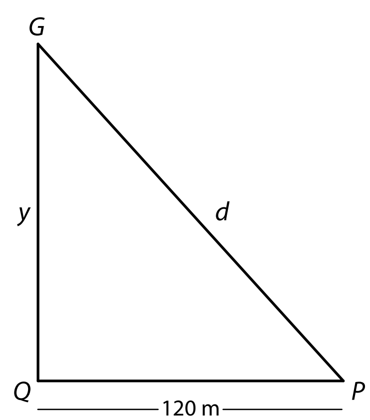


Figura 7

La altura y del globo es una función del tiempo t. Como en el movimiento uniforme, la distancia es igual a la velocidad por el tiempo:

$$y(t) = 40\,t$$

A su vez, d es una función de y; por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$d(y) = \sqrt{y^2 + 120^2}$$

Como $\boldsymbol{d}$ depende de $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}$ depende de $\boldsymbol{t}$, entonces $\boldsymbol{d}$ depende de $\boldsymbol{t}$; con la composición expresamos esta dependencia:

$$\begin{aligned}(d \circ y)(t) &= d(y(t))\\ &= \sqrt{(40t)^2 + 120^2}\\ &= \sqrt{1600t^2 + 14\,400}\end{aligned}$$

La distancia de $\boldsymbol{P}$ al globo $\boldsymbol{G}$, a los 4 minutos, es:

$$(d \circ y)(t) = \sqrt{1600(4)^2 + 14\,400} = 200\ m$$

EJERCICIOS

I. Dadas las funciones $f(x) = 4x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x$, halle:

1) $(f \circ g)(3)$
2) $(g \circ f)(-4)$
3) $(f \circ g)(-2)$
4) $g(f(4))$
5) $g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$
6) $(g \circ g)(x)$
7) $(f \circ g)(x)$
8) $(g \circ f)(-2x)$
9) $f(f(a + 1))$
10) $(f \circ g)\left(-\frac{3}{4}\right)$

II. En la figura 8 se dan las gráficas de las funciones h y g.

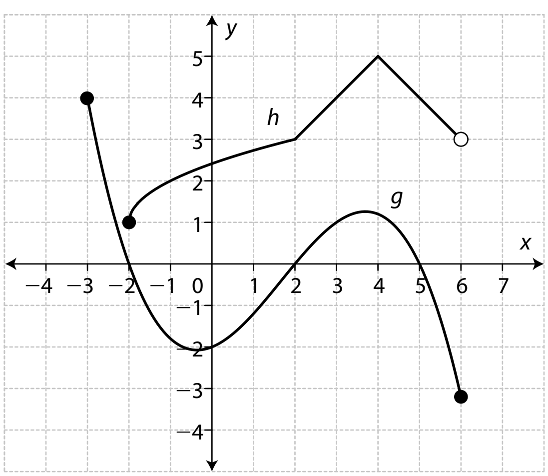


Figura 8

Estime los siguientes valores funcionales:

1) $(h \circ g)(-3)$
2) $g(h(-1))$
3) $(g \circ h)(2)$
4) $g(g(5))$
5) $h(h(4))$
6) $(h \circ h)(2)$
7) $h(g(0))$
8) $(g \circ g)(6)$

III. Con la información de la tabla 2 halle los valores funcionales indicados:

x	$f(x)$	$g(x)$
2	-1	-3
5	2	-1
-1	-2	5
-2	0	3
-3	5	2

Tabla 2

1) $g(f(5))$
2) $(f \circ g)(5)$
3) $(g \circ f)(-2)$
4) $f(g(-3))$
5) $g(f(2))$
6) $(f \circ f)(-1)$
7) $(f \circ f)(-3)$
8) $f(g(-2))$
9) $g(f(-1))$
10) $(f \circ g)(2)$

IV. Exprese la función h como composición de dos funciones.

1) $h(x) = (3x - 7)^5$
2) $h(x) = \sqrt{\frac{2}{5}x + 1}$
3) $h(x) = \left|11 + \frac{1}{2}x\right|$
4) $h(x) = \sqrt[4]{3 - 7x}$

V. Para cada par de funciones f y g, determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$:

1) $f(x) = 4x + 1$ $\quad$ $g(x) = -5 - 3x$
2) $f(x) = 2x - 3$ $\quad$ $g(x) = -x^2 - 2x + 1$
3) $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$ $\quad$ $g(x) = 6 - 2x$
4) $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$ $\quad$ $g(x) = 3x^2$

VI. Problemas

1) El costo semanal C de producir q unidades en una fábrica está dado:

$$C(q) = 12q + 8000, q \in \mathbb{N}$$

el número de unidades q producidas en t horas esta dado por:

$$q(t) = 50t, \quad t \in \mathbb{R} \geqslant 0$$

a) Trace las gráficas de C, q y $C \circ q$

b) Encuentre e interprete $(C \circ q)(t)$

c) Halle e interprete $(C \circ q)(8)$

d) Resuelva e interprete la ecuación $(C \circ q)(t) = 14\,000$

2) En una construcción se debe preparar una base cuadrada para poner en el centro un cilindro donde irá una columna (figura 9).

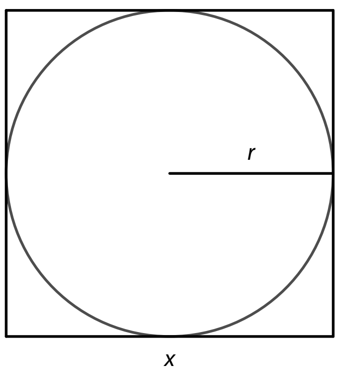


Figura 9

a) Escriba el radio r del cilindro como una función de la longitud x del lado del cuadrado.

b) Escriba el área A de la base circular de la columna como una función del radio.

c) Encuentre e interprete $(A \circ r)(x)$.

3) El tiempo empleado en la elaboración de x cantidad de artículos está dado por la función $t(x) = 160\,x$, donde t se mide en horas. El costo de cada hora de producción está dado por la expresión $C(t) = \frac{1}{6}t + 480$, dado en miles de pesos.

a) ¿Cuál es el tiempo empleado en la producción de 45 artículos? ¿Cuál es su costo?

b) ¿Cuántos artículos se elaboran si el costo es de 2640 miles de pesos o \$2 640 000?

c) Halle la composición de las funciones C y t, $(C \circ t)(x) = C(t(x))$. ¿Qué significa?

d) Halle $C(t(45))$; compare con el resultado obtenido en el ítem a).

9789587253610

En el libro *Precálculo con aplicaciones a las funciones* se presenta el concepto de *función* y sus características: dominio, rango, cortes con los ejes, intervalos de monotonía, intervalos en los que la función es positiva o negativa, entre otras. Al incluir las trasformaciones y operaciones entre funciones se amplían los puntos desde los cuales es posible acercarse y comprender cualquier tipo de función. Las funciones lineales, cuadráticas, polinomiales, racionales, exponenciales y logarítmicas, a las cuales se les dedica buena parte del libro, se estudian por medio de los aspectos generales y particulares de cada función, y son presentados en un lenguaje sencillo y claro con ejemplos y problemas ampliamente desarrollados. En cada sección se incluyen ejercicios y problemas, en diversos contextos, que permiten afianzar los conceptos tratados.

El libro consta de tres unidades: la primera, estudia el concepto de función, sus características, algunas de las operaciones entre funciones, las funciones a trozos y las funciones lineales; la segunda, muestra un amplio análisis de las funciones cuadráticas, polinomiales y racionales, su representación gráfica y aplicaciones; la tercera unidad trata sobre las funciones exponenciales y logarítmicas, ecuaciones, representación gráfica y aplicaciones.

70 AÑOS
UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO