LA GEOMETRÍA DE ALBERTO DURERO

Estudio y modelación de sus construcciones

Carlos Alberto Cardona Suárez

Adelina Ocaña Gómez
Nathalie Josefina Dussan Robles
Sonia Ivonne Cubillos Vanegas
Julio César Ocaña Gómez

LA GEOMETRÍA DE ALBERTO DURERO

ESTUDIO Y MODELACIÓN DE SUS CONSTRUCCIONES

Carlos Alberto Cardona Suárez

Con la colaboración de:
Adelina Ocaña Gómez
Nathalie Josefina Dussan Robles
Sonia Ivonne Cubillos Vanegas
Julio César Ocaña Gómez

UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ
JORGE TADEO LOZANO

La geometría de Alberto Durero: estudio y modelación de sus construcciones / Carlos Alberto Cardona Suárez ...[*et al.*]. - Bogotá: Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, 2006.
364 p.; il.: 28 cm.

ISBN: 958-9029-81-7

1. DURERO, ALBERTO, 1471-1528 - CRÍTICA E INTERPRETACIÓN.
2. PINTORES ALEMANES. I. Cardona Suárez, Carlos Alberto

CDD759.3'D933

FUNDACIÓN UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO
Carrera 4 No. 22-61 · PBX: 242 7030 · www.utadeo.edu.co

LA GEOMETRÍA DE ALBERTO DURERO
Estudio y modelación de sus construcciones
ISBN: 958-9029-81-7
Primera edición: junio 2006

RECTOR
José Fernando Isaza Delgado
DIRECTOR EDITORIAL
Alfonso Velasco Rojas

COORDINACIÓN EDITORIAL Y MULTIMEDIA
José Bonilla Uribe
Alexandra Cubides Diez

PRODUCCIÓN MULTIMEDIA
Julio Eduardo Ocaña León

CORRECCIÓN DE ESTILO
Julio Eduardo Mateus Mejía

Clara Ximena Torres
Patricia Quimbayo Carvajal

CONCEPTO GRÁFICO Y DIAGRAMACIÓN BÁSICA
Claudia Lorena Domínguez Pabón
César Fernando Garzón Paipilla

DISEÑO DE CUBIERTA
Claudia Lorena Domínguez Pabón
César Fernando Garzón Paipilla

DIAGRAMACIÓN FINAL - PREPRENSA
Liliana Medina Rodríguez
Sistemas Holograma Ltda.

COORDINACIÓN ADMINISTRATIVA
Henry Colmenares Melgarejo

DISTRIBUCIÓN Y LOGÍSTICA
Sandra Guzmán Guzmán
sandra.guzman@utadeo.edu.co

IMPRESIÓN Y ACABADOS
Panamericana Formas e Impresos S.A.

Impreso y hecho en Colombia 2006. Printed and made in Colombia 2006

LA GEOMETRÍA DE ALBERTO DURERO
Estudio y modelación de sus construcciones

ÍNDICE

LA GEOMETRÍA DE ALBERTO DURERO

ESTUDIO Y MODELACIÓN DE SUS CONSTRUCCIONES

INTRODUCCIÓN

«Si fuera posible que él [el buen artista] viviera por siempre, sus ideas interiores... siempre le aportarían algo nuevo para ser expresado a través de sus obras»

Alberto Durero[1]

El escenario natural para estudiar las posibles relaciones entre ciencia y arte es, sin duda alguna, el período conocido con el nombre de *Renacimiento italiano.*[2] Hombres de ciencia como Benedetti, Galileo y Kepler adelantaron su trabajo científico influenciados en gran medida por sus orientaciones teóricas en relación con el arte: Benedetti y Galileo estaban especialmente interesados en las artes pictóricas, en tanto que Kepler y Galileo compartían una profunda admiración por la música. Hombres de arte como Piero della Francesca, Leonardo da Vinci y Durero[3] sintieron la profunda necesidad de arraigar su práctica artística en principios universales provenientes de la matemática y la física. El matrimonio entre ciencia y arte produjo beneficios que se pueden sentir en cada uno de los extremos involucrados. A manera de ejemplo, los pintores adquirieron técnicas que les permitió representar en forma más convincente los espacios que exigían la presencia de la tercera dimensión,[4] los científicos se vieron animados a discutir matemáticamente los fenómenos asociados con la percepción, y, por último, los matemáticos abrieron la posibilidad de construir y desarrollar una nueva rama adscrita a sus disciplinas, nos referimos a la geometría proyectiva.

---

1 Citado en Bailey, M., 1995, p. 24.

2 Algunos comentaristas prefieren hablar del *Renacimiento* como un nombre asignado más a un estilo que a un período. A pesar de los buenos argumentos que se aducen en favor de dicha tesis, no es fácil después establecer parecidos de familia entre los estilos artísticos y las formas científicas de argumentación sin asumir dogmáticamente muchos compromisos de carácter epistemológico y filosófico. En ese orden de ideas, resulta por lo pronto más cómodo referirnos a una época comprendida entre 1300 (año cercano al nacimiento de Giotto y de Dante) y 1650 (año cercano a la muerte de Galileo, de Descartes y de Desargues). Una buena defensa del término entendido más como un estilo que como un periodo puede encontrarse en Field, J. V., 1997, y en Panofsky, E., 1999.

3 Ni Kepler, ni Durero, eran propiamente italianos; sin embargo, su trabajo estaba íntimamente relacionado con las tradiciones italianas.

4 Conviene advertir, no obstante, que las técnicas de perspectiva desarrolladas por los pintores y pensadores italianos no permiten agotar en forma contundente el fenómeno de la representación tridimensional. La perspectiva italiana asume un observador puntual (alguien que posee un único ojo), que logra la contemplación adecuada de la representación pictórica únicamente desde un punto especial y que asume que la proyección que ha de contemplar reside en una superficie plana.

El retrato de Luca Pacioli que aparece a continuación (Figura 1) ha de servirnos como el punto de arranque para la presentación de la investigación que nos ocupa. El cuadro puede despertar de manera inmediata los siguientes interrogantes: ¿quién es el autor de la obra?, ¿quién es el profesor de geometría?, ¿sobre qué versa la clase?, ¿quién es el discípulo? En un reciente artículo, Nick Mackinnon[5] ha propuesto algunas hipótesis muy sugestivas a propósito de las preguntas que hemos formulado. Mackinnon identifica al discípulo como Alberto Durero (1471-1528), y asume que la pintura retrata uno de los encuentros más importantes adelantados durante el Renacimiento: el de la tradición italiana con la tradición alemana. Haremos eco de las hipótesis de Mackinnon, y aun cuando los argumentos históricos que sugieren a Durero como el discípulo en mención no sean del todo concluyentes asumiremos, eso sí, que el cuadro nos permite revivir, con una dosis de romanticismo inexcusable, el posible encuentro entre Durero y Pacioli durante los años que cerraron el siglo XV y abrieron las puertas al siglo XVI.

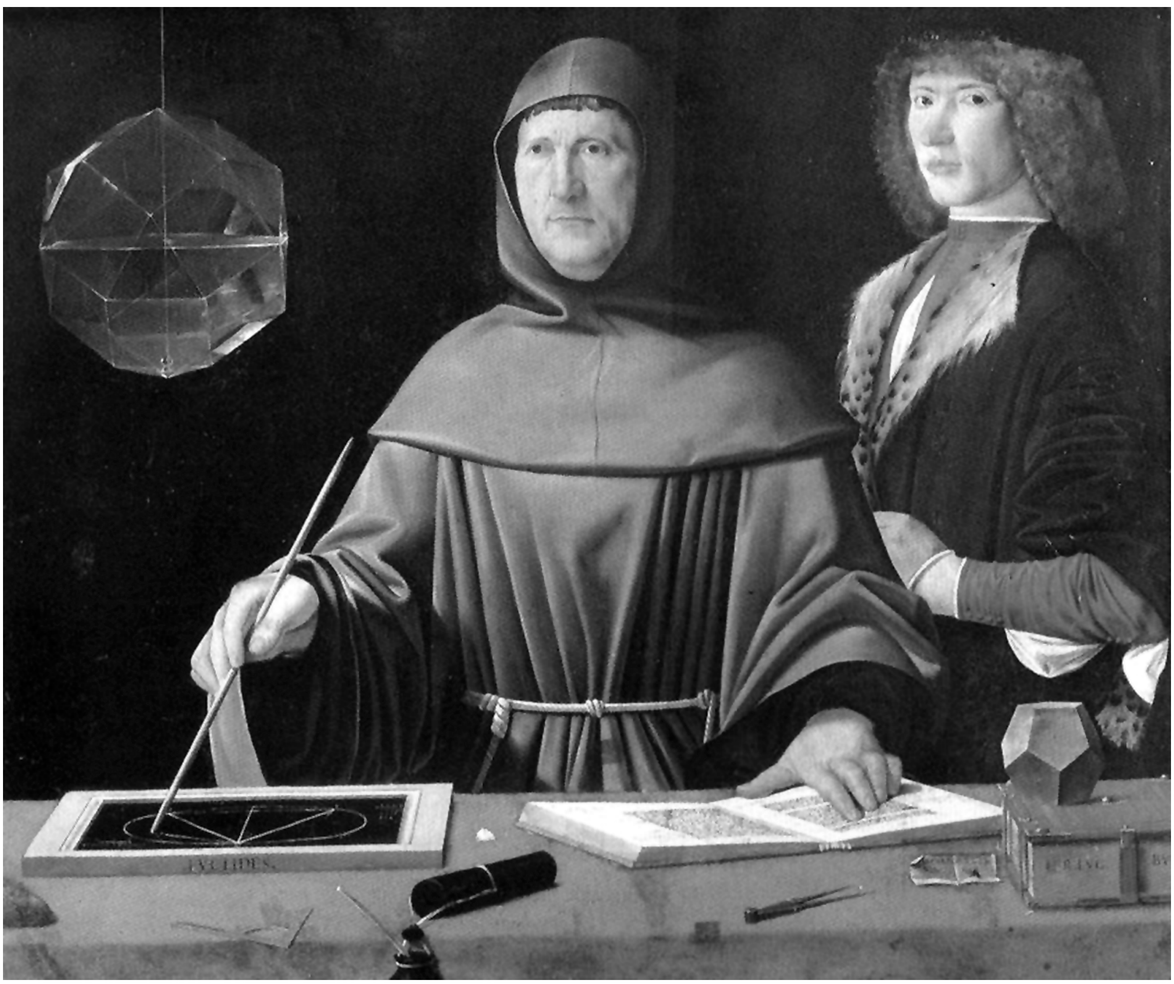

Figura 1. *Retrato de Fra Luca Pacioli y su discípulo*, 1495. Museo di Capodimonte

En el extremo inferior derecho del cuadro (extremo que no aparece en nuestra reproducción) hay un pequeño cartel con la inscripción: *JACO.BAR.VIGENNIS.P.1495*. De la inscripción se desprende, a

[5] Véase Mackinnon, N., 1993.

manera de hipótesis plausible, que el autor es el pintor veneciano de origen alemán Jacopo de' Barbari[6] (1450?-1516). Sin embargo, algunos historiadores inclinados a leer la segunda parte del cartel como una alusión a la edad del artista (21 años), tienden a creer que el autor de la obra debe ser otro pintor veneciano, pues para el año de 1495 Jacopo de' Barbari contaba ya con 45 años de vida. Dado que no resulta del todo convincente que el cartel aluda a la edad del autor, mantendremos nuestra confianza en la primera hipótesis formulada.

En los inventarios del palacio ducal de Urbino, redactados en el siglo XVII, se encuentra la siguiente nota: «*Un fraile que se tiene por retrato de Fra Luca del Borgo, cuyo autor se desconoce, enseñando Euclides al duque Guido, sobre tabla*».[7] De la reseña se desprenden las siguientes hipótesis: (i) el profesor de geometría es el franciscano Luca Pacioli (1445-1517), nacido en Borgo San Sepolcro, lugar de nacimiento de Piero della Francesca (1410?-1492); (ii) el discípulo es Guidobaldo da Montefeltro (1472-1508), duque de Urbino (sucedió a Federico de Montefeltro en 1482). La primera hipótesis se confirma con el acopio de los siguientes argumentos adicionales: (i) al lado derecho reposa un libro con la inscripción *LI.R.LVC.BVR,* que posiblemente traduce: *Liber Reverendi Luca Burgensis* y que quizás[8] alude a la *Summa* publicada en Venecia por el fraile en 1494; (ii) el parentesco que existe entre la figura del profesor de geometría y el fraile que representa a san Pedro mártir en el retablo de Montefeltro, atribuido a Piero della Francesca[9] —1469-1474—; (iii) la presencia de un dodecaedro sobre la *Summa* y un rombicuboctaedro[10] que pende de un hilo como expresión de dos de los sólidos recogidos por Luca Pacioli en su obra *La divina proporción*. La segunda hipótesis se puede apoyar también si aludimos al hecho de que la *Summa* está dedicada a Guidobaldo.

En la pizarra aparece un dibujo geométrico que parece aludir a la construcción que le permite a Euclides demostrar la proposición 12 del Libro XIII de los *Elementos*. Esta estipula que el cuadrado del lado de un triángulo equilátero es tres veces mayor que el cuadrado del radio del círculo circunscrito. Luca Pacioli está agregando una línea adicional que nos induce a contemplar una escena dinámica; la demostración, cualquiera que ella sea, se encuentra a mitad de camino. Euclides hace uso de dicha proposición en la construcción del tetraedro y del icosaedro en las proposiciones que siguen inmediatamente después en el Libro XIII. Paradójicamente, Euclides no usa la proposición 12 en la construcción del dodecaedro. Para ello construye un cubo al cual, en forma adecuada, agrega pentágonos que lo van envolviendo.[11] No obstante, Pappus propuso otra forma de construir el dodecaedro que sí hace uso de la proposición 12 de Euclides.[12] Podemos entonces conjeturar que

---

6 Llamado así por los venecianos porque Jacopo pasaba mucho tiempo con los bárbaros que habitaban al norte de los Alpes.

7 En Chastel, A., 2005, p. 75. Mackinnon, así mismo, menciona la existencia de otras notas en los inventarios. De estas se desprenden hipótesis encontradas; una de ellas atribuye el cuadro al periodo final de Piero della Francesca.

8 Mackinnon aduce que la *Summa* es la única obra del fraile que sobrepasa las 600 páginas.

9 La mayoría de historiadores ha dado por sentado que san Pedro mártir en el retablo de Montefeltro es un retrato de Luca Pacioli. Kenneth Clark, sin embargo, tiene buenas razones para pensar que: (i) los personajes que acompañan a la Virgen en el retablo y que rompen la armonía que se había logrado en la representación del espacio arquitectónico, no fueron obra directa de Piero della Francesca, sobre quien no cabe la menor duda de haber participado en la concepción del espacio arquitectónico capturado en el retablo; (ii) no es del todo seguro que se hubiese adoptado la figura de un fraile franciscano (Luca) para representar a un santo dominico (san Pedro mártir); (iii) el parentesco que se aduce entre el personaje del retablo y el profesor de geometría del cuadro de Jacopo de' Barbari no es tan concluyente. Al margen de las controversias mencionadas, puede sostenerse que el retablo se realizó con el objeto de conmemorar el nacimiento de Guidobaldo, el único hijo del duque de Urbino. Véase Clark, K., 1995, pp. 83-85.

10 Este rombicuboctaedro está modelado en el capítulo 4.

11 Las construcciones precisas de los sólidos mencionados se pueden seguir con todos sus detalles en el capítulo 4 de la presente investigación.

12 El lector puede seguir la construcción de Pappus en el comentario que Heath agregó a su edición crítica de los *Elementos* de Euclides. Véase Euclides, 1956, Vol. 3, pp. 501-503. Euclides se vale de la proposición 4 del Libro XIII, que conduce a resultados equivalentes. En el capítulo 4 de esta investigación se presenta una síntesis y una modelación en *Cabri* del método de Pappus. Por otra parte, dado que el dodecaedro descansa sobre una de sus caras, es más factible pensar en el modelo de Pappus en oposición al de Euclides.

Pacioli pretende enseñarle a su discípulo, quienquiera que sea, la construcción del dodecaedro a partir de las enseñanzas de Pappus, que se apoyan en la proposición 12 del Libro XIII de Euclides.[13]

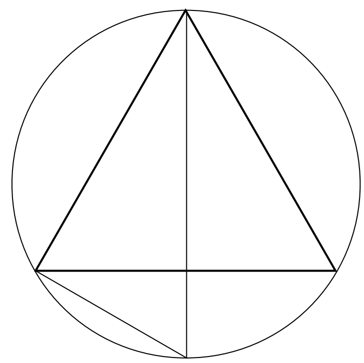

Figura 2. Euclides (XIII, 12)

Mackinnon menciona también otra interesante alternativa: posiblemente Luca alude a las proposiciones 2 y 6 del conocido Libro XIV de los *Elementos*. La proposición 2 sostiene que el pentágono y el triángulo equilátero que conforman el dodecaedro y el icosaedro inscritos en una esfera se pueden inscribir en el mismo círculo. La proposición 6 hace uso de este resultado[14] y exhibe un triángulo equilátero y un pentágono inscritos en el mismo círculo. La idea de Mackinnon se resume así: Luca ha dibujado ya el triángulo y se dispone a completar el dibujo con el trazo de uno de los segmentos que conforman el pentágono que ha de acompañar al triángulo en el mismo círculo. Su conjetura se apoya en la similitud con una construcción perspectiva de la figura que acompaña la proposición 6 del Libro XIV. La Figura 3 muestra el triángulo y el pentágono inscritos en el círculo y, en la parte superior, el dibujo en escorzo, atendiendo las técnicas ideadas por Piero della Francesca, las cuales se presentan con todo su detalle en el capítulo 5 del presente libro.

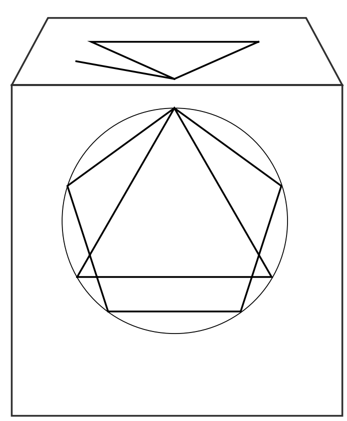

Figura 3. Euclides (XIV, 6) y su proyección en escorzo

[13] No obstante, no existe una clara evidencia que muestre que Luca conociese la construcción atribuida a Pappus.

[14] Esta proposición sugiere que el área superficial del dodecaedro es al área superficial del icosaedro lo que la longitud del lado del cubo es a la longitud del lado del icosaedro (siempre que todos los sólidos estén inscritos en la misma esfera).

La Figura 4 muestra la construcción anterior con su proyección en escorzo sobre la reproducción del cuadro de Jacopo de' Barbari. La modelación se ha hecho con el programa *Cabri*; exhibe el punto de fuga a la altura de la cabeza de Luca y deja ver la plausibilidad de la interpretación de Mackinnon. Hay que anotar, sin embargo, que el dibujo de la circunferencia en escorzo se aleja levemente de la proyección esperada en virtud de las reglas de Piero della Francesca.

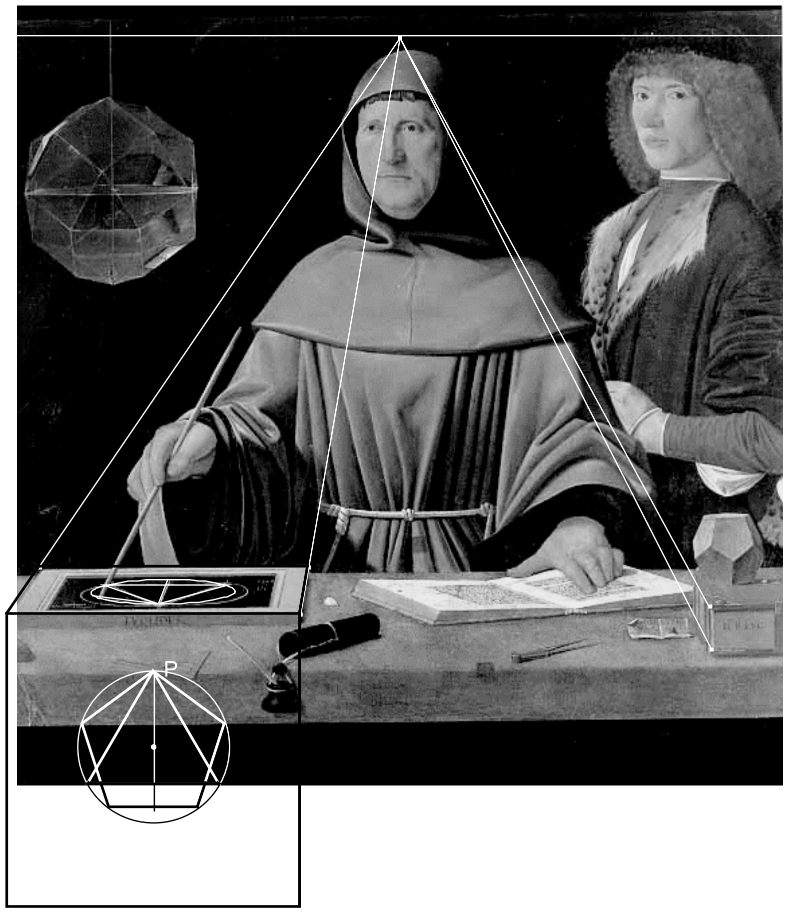

Figura 4. Escorzo de Euclides (XIV, 6), *Retrato de Fra Luca Pacioli y su discípulo*

Ocupémonos ahora del discípulo. Mackinnon se apoya en el parecido de familia que encuentra entre el discípulo de Luca Pacioli y algunos retratos del joven Alberto Durero.[15] Haciendo caso omiso, claro está, de la barba que exhibe Durero en la mayoría de sus retratos posteriores a 1495. Mackinnon nos pide que atendamos con cuidado los documentados viajes que Durero realizó a Italia. El primero de ellos a Venecia debió ocurrir entre 1494 y 1495, y debido a las dificultades propias del idioma, podemos pensar

15 Véase la reproducción del *Autorretrato* de Durero fechado en 1493 (dos años antes del retrato de Jacopo), que aparece al final de la presente introducción. El apellido del artista está relacionado con el lugar de nacimiento de su padre Albrecht, nacido en Ajtó, que significa *puerta* en húngaro y que se puede traducir como *Türe* o *Düre* en alemán. La familia Durero adoptó un escudo de armas que incluía entre sus emblemas una puerta abierta. Una reproducción del escudo puede verse en la portada de este libro. Joseph Koerner ve en dicho emblema una fuente posible para explicar el origen del monograma ideado por Durero como sello de sus creaciones: una A que representa el marco de una puerta y una D en su interior que ha de significar otra puerta que se abre alrededor del eje impuesto por el segmento vertical de la letra. Véase Koerner, J., 2002, p. 21.

que debió entrar en contacto especialmente con personas de la colonia alemana allí establecida. El pintor Jacopo de' Barbari debió ser uno de estos personajes alemanes residentes en Venecia en la época que estamos mencionando. *«En el primer encuentro* —sostiene Mackinnon—, *Barbari le mostró a Durero dos figuras, masculina y femenina, que fueron construidas por métodos geométricos, y esta experiencia lo indujo a embarcarse en la investigación por el secreto de los movimientos y las proporciones humanas».*[16] Luca Pacioli se encontraba en Venecia por esa época, pues atendía cuestiones relacionadas con la publicación de su *Summa*. Mackinnon asegura que Pacioli tuvo contacto con la colonia alemana residente en Venecia y no teme en afirmar que «*nosotros tenemos medios, motivos y oportunidades para creer que Barbari pintó a Pacioli ofreciendo una lección avanzada de geometría a Durero en Venecia en enero o febrero de 1495*».[17]

El segundo de los viajes mencionados debió ocurrir entre 1505 y 1507. En 1507 Durero adquirió un ejemplar de la edición de Zamberti de los *Elementos* de Euclides. Entre los atractivos de dicha edición estaba el hecho de contener también la *Óptica* euclidiana. Cuando Durero finalizó en 1506 el encargo de *La fiesta de las guirnaldas de rosas* para la iglesia de San Bartolomé[18] (la iglesia de la colonia alemana en Venecia), le escribió a su amigo Pirckheimer: «*terminaré aquí en diez días. Después me gustaría dirigirme a Bolonia para aprender los secretos del arte de la perspectiva de un hombre que está deseoso de enseñármelos. Debo estar allí 8 ó 10 días y después regresaré a Venecia*».[19] Es muy probable que el profesor anónimo que le enseñó a Durero el arte de la perspectiva de Alberti, Piero della Francesca y Leonardo da Vinci, fuese el mismo Luca Pacioli. En el afortunado encuentro, este debió revelarle a su discípulo una copia del *De prospectiva pingendi* de Piero della Francesca, que fue guardada en la biblioteca del duque de Urbino.[20] Una parte importante de la presente investigación pretende hacer evidentes algunas influencias del trabajo de Piero della Francesca en la concepción teórica de Alberto Durero.

Los elementos de juicio que hemos expuesto sirven de fundamento para la siguiente conclusión de Mackinnon: «*El retrato de Fra Luca Pacioli pintado por Jacopo de' Barbari en 1495 captura uno de los más grandes momentos del Renacimiento, la transmisión a Alberto Durero, y de ahí al mundo del norte de los Alpes, de la geometría de la antigua Grecia, así como de las bases del nuevo arte de Italia*».[21] Los argumentos de Mackinnon sugieren que no es del todo descabellado pensar que el discípulo en el retrato de Fra Luca Pacioli sea Alberto Durero, muchas coincidencias convergen para darle fuerza a la hipótesis. Sin embargo,

---

16 Mackinnon, N., 1993, p. 141. Panofsky también subraya la importancia de las figuras humanas de Barbari en las composiciones de Durero; ver Panofsky, E., 1982, p. 61. El siguiente fragmento de Durero exhibe la admiración que el artista sentía por Jacopo: «*No he encontrado quién haya escrito acerca de un sistema de proporciones humanas, excepto Jacopo, un primoroso pintor oriundo de Venecia. Él me mostró cómo construir un hombre y una mujer basado en mediciones. Cuando me habló de esto, yo habría preferido tomar posesión de dicho conocimiento más que de un reino... Pero noté que Jacopo no deseaba darme una clara explicación; así que continué por mi cuenta y leí a Vitrubio, quien describe las proporciones del cuerpo humano*» (citado en Bartrum, G., 2002, p. 135, tomado de los manuscritos para la introducción de los *Cuatro libros acerca de las proporciones humanas* de Durero).

17 Ibíd., p. 141.

18 Cabe anotar que fue en dicha iglesia donde Pacioli dictó una conferencia sobre los *Elementos* de Euclides, en 1508, frente a la composición de Durero. Véase Mackinnon, N., 1993, p. 146.

19 En una carta a Wilibald Pirkheimer de13 de octubre de 1506. Véase Durero, A., *Memoir of journeys to Venice and the Low Countries*, p. 18.

20 La mayor prueba de la evidencia de ello reside en la similitud entre las figuras humanas que reposan en el tratado de Piero y las correspondientes figuras que se encuentran en los libros acerca de la proporción humana del artista alemán.

21 Mackinnon, N., 1993, p. 154. A juzgar por el origen del apellido del artista alemán, bien podemos concluir que Durero es la *puerta* de entrada del Renacimiento italiano a territorio alemán.

ningún argumento es concluyente. No estamos interesados en hacer arqueología. Cualquiera haya sido la intención real que Jacopo de' Barbari tuviese en mente a la hora de pintar el retrato, queremos pensar que la escena describe el encuentro entre las personas y las tradiciones de las que se ocupa la presente investigación. Alberto Durero reunido con Luca Pacioli; la tradición griega, representada en los *Elementos* de Euclides, la construcción del dodecaedro de Pappus y la presencia de un sólido arquimediano, mezclada con la fortalecida tradición italiana, recogida en la *Summa* de Luca Pacioli, el dodecaedro y el rombicuboctaedro de Luca y Piero della Francesca y los métodos proyectivos ideados por Alberti y Piero della Francesca, se ponen a disposición del espíritu inquieto que ha de prender la mecha que activará la naciente tradición alemana. Ahora bien: la actitud de Durero no es la de un receptor pasivo que agradece las dádivas que el coloso desea compartir; en él se sintetiza el espíritu deseoso de transformar y enriquecer el tesoro que recibe en sus manos. «*Durero no salió al encuentro de lo antiguo*»; como sostiene con vehemencia Erwin Panofsky, «*fue lo antiguo quien vino a encontrarle, a través de un intermediario italiano*» (Panofsky, E., 1998, p. 275). Durero entendió que la tradición griega no estaba allí para ser contemplada con nostalgia; estaba allí, a su disposición, para obligarla a circular por tierras nuevas. Su actitud frente a la tradición griega es la de un conquistador. En las palabras de Panofsky: «*Su actitud hacia el arte clásico no fue la de un heredero, ni la de un imitador, sino la de un* '*conquistador*'. *Para él* [Durero], *la Antigüedad no fue un jardín fértil siempre en flores y frutos, ni un campo de ruinas cuyas piedras y columnas pudieran aprovecharse de nuevo: fue más bien un* '*reino*' *perdido que había de reconquistarse con una campaña bien organizada*» (Panofsky, E., 1998, pp. 263-264).

El profundo respeto y admiración de Durero por la geometría se expresa con una fuerza que no tiene comparación en uno de sus más bellos grabados a buril. Nos referimos a *Melencolia I*. Este forma parte, con *San Jerónimo en su estudio*[22] y *El caballero, la muerte y el demonio*, de los tres grabados más importantes y conocidos de Durero, producidos entre 1513 y 1514.[23] Erwin Panofsky propuso un soberbio e inigualable análisis del grabado que nos interesa. Tanto san Jerónimo como la Melancolía alada se ocupan de una tarea intelectual; el primero lo hace en un espacio aséptico, especialmente diseñado para el retiro y la paz espiritual, a plena luz del día; en tanto que la Melancolía alada yace en un lugar desapacible, oscuro y desordenado. San Jerónimo está capturado por un estado de absoluta concentración teológica, en tanto que el personaje de *Melencolia I* está sumido en la triste inacción que provoca su estado de ánimo. Su cabeza se deja caer sobre la mano izquierda, que la soporta; la mano derecha dirige un trazo con el compás, trazo este que no es el objeto de atención, pues la mirada se encuentra perdida en una dirección indefinida y de nada nos sirve seguirla, ya que su objetivo sin duda se encuentra allende nuestras posibilidades. Los tres grabados mencionados muestran un reloj de arena entre los objetos presentes. Además del reloj, en *Melencolia I* se destacan los siguientes: una balanza de platillos colgada de una pared lateral;[24] una campana colgada en la pared frontal y cuyo martillo delata la dirección vertical; una esfera; un sólido cuya naturaleza es muy imprecisa;[25] un perro

22 Figura 5.44 del presente libro.

23 Estos grabados recogen las enseñanzas que Durero adquirió después de su segundo viaje a Italia.

24 Dado que la prolongación del brazo de la balanza converge al punto de fuga de las ortogonales, hemos de concluir que la balanza se encuentra en equilibrio.

25 Todo sugiere que se trata de un cubo al que se le han recortado dos vértices enteramente opuestos y se ha dispuesto de tal forma que descansa sobre uno de los sectores recortados. En Dürer, A., 1972, p. 282, puede seguirse un esbozo preparatorio del sólido en mención. En el capítulo 4 se hace un estudio del dibujo preparatorio. El escultor italiano Claudio Parmiggiani presentó en el año 2003 una bella propuesta en mármol negro para reconstruir el sólido propuesto por Durero. Véase Clair, Jean, 2005, p. 494.

famélico; un murciélago que sostiene un cartelillo con el título *Melencolia I*; una escalera; un cuadrado mágico[26] y otros implementos propios del taller de un artesano.

En la época se realizaban representaciones de los cuatro estados de ánimo asociados con los cuatro humores clásicos: colérico, flemático, sanguíneo y melancólico. Mientras se saludaba con beneplácito la presencia del carácter sanguíneo (típico de la juventud), se lamentaba siempre con reservas la presencia del talante melancólico; la persona que estuviese poseída por él era sinónimo de ser torpe, mezquina, rencorosa, desleal, irreverente, indolente, arisca, triste, olvidadiza y soñolienta. En ese orden de ideas, la representación clásica de la melancolía reúne a una mujer dormida al lado de una rueca, acompañada de un hombre igualmente dormido.

Durero nos deleita con una representación revolucionaria y novedosa, tanto de la melancolía, como de la geometría. Su reacción se sintetiza en forma brillante en las palabras de Panofsky:[27]

> Aquellas viles criaturas [las representaciones clásicas de la melancolía] se han dormido de pura holgazanería. La *Melancolía* [de Durero], por el contrario, está, si se nos permite decirlo así, superdespierta; su mirada fija es una mirada de escrutinio atento, aunque infructuoso. Si está inactiva no es por ser demasiado holgazana como para trabajar, sino porque el trabajo ha perdido para ella todo su sentido; su energía está paralizada no por el sueño sino por el pensamiento... En lugar de un ama de casa abandonada tenemos un ser superior —superior no solo por estar dotado de alas, sino también por su inteligencia y capacidad imaginativa— rodeado de los útiles y símbolos del empeño creador y de la indagación científica (Panofsky, E., 1982, p. 175).

La tarea de intelectualizar la melancolía armoniza y complementa la tarea de humanizar la geometría. Dejemos nuevamente que sea Panofsky quien oriente nuestra contemplación del grabado:

> Los anteriores melancólicos habían sido unos desgraciados avarientos y holgazanes, desgraciados por su insociabilidad y genérica incompetencia. Las anteriores Geometrías habían sido personificaciones abstractas de una ciencia noble, desprovistas de emociones humanas y totalmente incapaces de sufrir. Durero imaginó un ser dotado de la potencia intelectual y las posibilidades técnicas de un "Arte", pero que al mismo tiempo desespera bajo la nube de un "humor negro". Mostró una Geometría hecha Melancolía o, si se prefiere a la inversa, una melancolía adornada de todo lo que implica la palabra geometría: en suma, una *Melancholia artificialis* o Melancolía de Artista...
> ... las personas bien dotadas para la geometría por fuerza han de ser melancólicas, porque el saber que existe una esfera que está más allá de su alcance les hace sufrir de un sentimiento de confinamiento e insuficiencia espiritual. Esto es precisamente lo que la *Melancholia* de Durero parece experimentar. Alada, pero acurrucada en el suelo; coronada, pero sumida en sombras; equipada con los instrumentos del arte y de la ciencia, pero presa de la cavilación ociosa, ofrece la imagen de un ser creador reducido a la desesperación por su conciencia de las barreras infranqueables que lo separan de un ámbito superior del pensamiento (Panofsky, E., 1982, pp. 176, 182).

No en vano podemos arriesgar la hipótesis que nos hace ver en *Melencolia I* un autorretrato adicional del artista alemán.

---

26 Posiblemente tomado de los divertimentos matemáticos diseñados por Luca Pacioli. El cuadrado mágico tiene, entre sus elementos, la fecha de realización del grabado: 1514. Algunos comentaristas han establecido relaciones con la fecha de la muerte de la madre del artista y su estado de ánimo.

27 Recientemente, Peter-Klaus Schuster ha sugerido una reacción interesante a las orientaciones propuestas por Panofsky. Según el autor, *Melencolia I* debe interpretarse a la luz de la iconografía clásica con relación al tratamiento de la melancolía. Véase Shuster, P., 2005.

Figura 5. Durero: *Melencolia I*, 1514, grabado a buril. British Museum

En 1525 Alberto Durero escribió, con un lenguaje brusco, un curioso tratado de geometría. El pintor alemán se destacó especialmente por sus famosos grabados en madera (xilografías), por sus preciosos grabados a buril, por sus contribuciones a la antropometría y por introducir en Alemania las innovaciones propias del llamado Renacimiento italiano. Alrededor de 1507 Durero concibió la importancia y necesidad de escribir un vasto tratado de pintura especialmente dirigido a los jóvenes aprendices de dicho arte. Este tratado, cuyo título provisional era *Alimento para jóvenes pintores,* y que finalmente nunca salió a la luz, debía comprender tres partes básicas. En primer lugar, versaría sobre la elección de aquel joven que podría llegar a convertirse en un pintor[28] y estipularía el tipo de formación que debía recibir. Segundo, se ocuparía del ejercicio de la pintura y expondría la teoría de las proporciones, la medida del hombre, de los caballos y de los edificios; versaría también acerca de la luz, la sombra y la teoría de los colores. Por último, el tratado exhibiría algunos consejos profesionales sobre el lugar en donde se debería ejercer la pintura y los honorarios a cobrar. Pero no tardó en advertir la complejidad de la empresa que se había propuesto y decidió (1512) restringirse al apartado de la segunda parte, relacionado con la teoría de las proporciones del cuerpo humano. Durero abandonó el proyecto en 1513 y lo retomó más tarde, en 1521. En 1523 decidió aplazar la publicación con el ánimo de llenar un vacío que él mismo había detectado: la comprensión completa del tratado de las proporciones humanas exigía una comprensión igualmente completa sobre el arte de la medida en lo concerniente a las líneas, las superficies y los cuerpos, siempre que se respetasen los métodos que los canteros practicaban cotidianamente (esto se desprende de la dedicatoria que el pintor redactó a Wilibald Pirckheimer como introducción a los *Cuatro libros sobre las proporciones del cuerpo humano,* 1528).

El *Tratado de la medida* debe concebirse entonces como una introducción metodológica para el tratado sobre las proporciones humanas. Detengámonos por un momento en el título completo del tratado y en algunas alusiones que saltan a la luz en forma evidente. Reza así: *Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheit in Linien Ebenen und ganzen Körpern, durch Albrecht Dürer zusamengezogen und zu nutz aller Kunstliebhabenden mit zu gehörigen Figuren in Druck gebracht im Jahr MDXXV* (*Instrucción para la medida con el compás y la regla de líneas, planos y todo tipo de cuerpos, reunida por Alberto Durero en provecho de todos los aficionados al arte, con las correspondientes figuras, impreso en el año 1525*). En la dedicatoria a Pirckheimer, Durero señala que hasta la fecha a los jóvenes pintores alemanes se les había enseñado el arte sin ningún fundamento, recurriendo tan solo a la práctica diaria. Ellos, advierte el pintor y teórico, habían crecido en el más completo desconocimiento, al igual que un árbol silvestre al que no se poda. Así las cosas, alcanzó a advertir que si bien la enseñanza tradicional podía aportar instrucciones útiles para el trabajo diario, esta enseñanza no derivaba tales instrucciones de principios generales, ni pretendía respaldarlas con hechos verificables, algo muy diferente a lo que de hecho ya se venía dando con la instrucción de los jóvenes aprendices en Italia. El interés por poner en contacto a las nuevas generaciones de pintores alemanes con los novedosos descubrimientos italianos explica, quizá, por qué Durero insistió en labrarse su propio y rudo alemán, rehuyendo inicialmente la posibilidad de que Pirckheimer preparara una edición culta en latín. El *Tratado* de Durero puede contemplarse como una obra que ha de servir de bisagra entre dos tradiciones: la tradición práctica de los talleres alemanes y la tradición teórica de las escuelas italianas. En palabras de Erwin Panofsky: «*El* Unterweisung der Messung *sirvió, por así decirlo, de puerta giratoria entre el templo de la matemática y la plaza de mercado. Mientras familiarizaba a los toneleros y ebanistas con Euclides y Ptolomeo, familiarizaba también a los matemáticos profesionales con lo que podríamos llamar la* '*geometría de taller*'» (Panofsky, E., 1982, p. 267).

[28] Esta elección debía basarse en los datos del horóscopo.

Tanto Leone Battista Alberti como Filippo Brunelleschi habían concebido la urgente e imperiosa necesidad de estructurar, a partir de sus fundamentos, las reglas de transformación que permitiesen reconstruir el espacio tridimensional sobre un plano bidimensional. Fue Brunelleschi el primero en aplicar la teoría euclidiana de la visión a los problemas de la representación gráfica. Gracias a sus reglas, los arquitectos contaban con instrumentos muy poderosos de representación pictórica. No obstante la importancia de las reglas mencionadas, los pintores tenían que hacer frente a un segundo interrogante: ¿cómo aplicar aquellas reglas, que funcionan en forma adecuada cuando se trata de dibujar edificios o detalles arquitectónicos, al caso de la representación del cuerpo humano en movimiento? Este fue, precisamente, uno de los problemas que convocó la atención de los pintores que se preocupaban por los asuntos relacionados con los fundamentos de su actividad: Piero della Francesca, Leonardo da Vinci y Alberto Durero. Así las cosas, mientras los geómetras clásicos se obsesionaban por encontrar métodos precisos para dibujar con regla y compás polígonos y curvas regulares, y mientras los arquitectos se ufanaban de hallar reglas exactas para dibujar una clase compleja de edificios y construcciones, Durero pretendía hallar un método riguroso para dibujar con regla y compás cuerpos humanos en movimiento. No en vano muchos dibujos de figuras humanas realizados por él tienen en sí la huella indeleble de una delicada figura geométrica realizada con regla y compás, como si se tratara de la construcción compleja de un polígono regular.

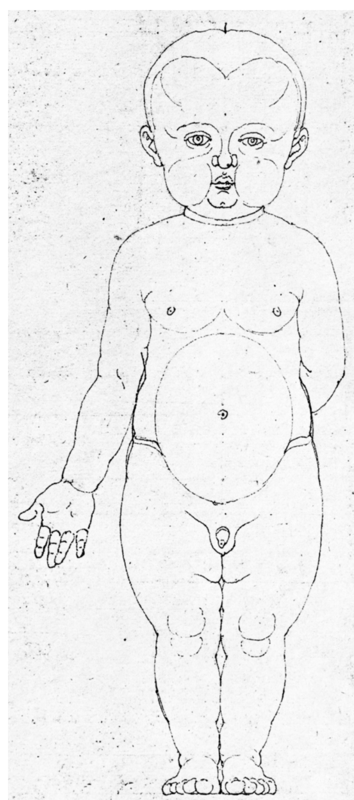

Figura 6. Durero: “Proporciones de un niño”, *The human figure,* 46

Durero buscaba, pues, los fundamentos de su disciplina. Pretendía exponerlos a la nueva generación de jóvenes artistas alemanes. Creyó hallarlos en la geometría griega, redescubierta por los artistas italianos. En ese orden de ideas podemos entender la advertencia con la que el artista introduce el primer libro de su *Tratado de la medida*: «*El muy sagaz Euclides recopiló los fundamentos de la geometría. Quien los conozca* *bien, no tiene ninguna necesidad de lo escrito a continuación, pues sólo se ha escrito para los jóvenes y para aquellos a quienes nadie ha instruido con excelencia*» (*DM*, I, p. 133).[29] Dicha orientación es coherente con los elementos que hemos advertido. Sin embargo, cometeríamos una gran injusticia si aseveramos que el *Tratado* de Durero no aporta algo nuevo. De hecho ya hemos señalado, siguiendo a Panofsky, que el *Tratado* enriquece el ejercicio profesional de la matemática con la "geometría de taller". Hay claros ejemplos evidenciando que él estimuló la imaginación de pensadores como Tartaglia, Benedetti, Galileo y Kepler.

En el presente estudio del tratamiento que Durero dio a la geometría queremos destacar algunas ideas originales que, en cierta medida, anticiparon resultados importantes en la geometría de los siglos siguientes. Aclaramos, sin embargo, que obraremos como intérpretes que harán lo posible por atribuirle varias ideas que posiblemente no pasaron por su mente. Queremos, en forma explícita, resaltar los pasajes que nos interesan sobre la base de lo que finalmente llegó a consolidarse algunas centurias más tarde. Ahora bien: antes de señalar con claridad las tesis que deseamos defender, vamos a presentar en forma sucinta la estructura del *Underweysung der Messung*.

El *Tratado* consta de cuatro libros. El primero presenta las definiciones que han de servir como punto de partida y se concentra en la descripción de los objetos geométricos que comportan tan solo longitud. Durero se detiene tanto en la línea recta, como en las curvas algebraicas de las que se ocuparán los geómetras del siglo XVII. Resulta particularmente interesante el tipo de construcción que el pintor recomienda a propósito de las secciones cónicas (este es un caso importante del enriquecimiento de la matemática con métodos provenientes de la "geometría de taller"). El segundo libro se ocupa de las figuras bidimensionales. El *Tratado* es prolífico en la recomendación de métodos para la construcción de polígonos regulares y de figuras que incrementan en una cantidad dada el área de una figura inicial. Durero propone también un método interesante para obtener una solución aproximada de la trisección del ángulo. El tercero ilustra la aplicación de la geometría a las tareas de la arquitectura y familiariza al lector alemán con la construcción geométrica de las letras romanas. El cuarto se ocupa de los cuerpos tridimensionales (platónicos y arquimedianos); del clásico problema relacionado con la duplicación del cubo y, finalmente, de los métodos proyectivos ideados, en principio, por Piero della Francesca.

En el presente libro nos hemos dado a la tarea de seguir con atención las propuestas y las fuentes que iluminan el tratado de geometría escrito por Durero. Nos interesa establecer en forma clara las relaciones con la tradición italiana, las novedades y el impacto cercano de los trabajos del artista alemán. En algunos casos nuestra labor se limita a elucidar algunas novedosas y complejas construcciones propuestas por el autor; en otros exploraremos las conexiones y relaciones con propuestas ya existentes en la tradición italiana (Luca Pacioli, Piero della Francesca, Alberti); en otros aclararemos los fundamentos euclidianos de las construcciones y formularemos las críticas correspondientes cuando la construcción de Durero se separa de los métodos ortodoxos; en otros más advertiremos las limitaciones de algunas construcciones a la luz de desarrollos ulteriores de la geometría; y, por último, en algunos casos exploraremos el impacto de las ideas o de los temas tratados por Durero en el contexto de los desarrollos científicos de los siglos siguientes. En el ejercicio propuesto nos encargaremos de modelar todas las construcciones sugeridas por el autor haciendo uso de un *software* de geometría dinámica. El lector puede seguir la modelación propuesta activando los archivos presentes en el CD

[29] Usaremos las siglas *DM* para referirnos al tratado de geometría de Durero; citaremos primero el libro con números romanos, y, a continuación, la página correspondiente de la edición en español. Cuando se trate de una figura, citaremos la numeración correspondiente al *Tratado*.

que acompaña esta edición. El *software* al que aludimos es *Cabri II plus,* con el que podrá seguir la modelación correspondiente, siempre que esté familiarizado con el programa, aplicando las instrucciones que se ofrecen en el texto. De cualquier manera, el seguimiento de las modelaciones en *Cabri* no es requisito para la comprensión cabal de las ideas que se exhiben en este trabajo.

El libro está organizado en seis capítulos, que describiremos a continuación. El capítulo 1 se ocupa del estudio detallado que Durero propuso acerca de las espirales y algunas curvas nuevas en el inventario de objetos geométricos. Si bien no hay evidencias claras acerca de su familiaridad con la obra de Arquímedes, algunos fragmentos parecen constatar algún conocimiento al respecto; sin embargo ninguno de ellos es concluyente. Durero insinuó la construcción de una espiral logarítmica y propuso mecanismos interesantes para construir otras curvas que convocaron el interés de matemáticos posteriores. En dicho capítulo nos hemos tomado la libertad de desentrañar la naturaleza y esencia de tres novedosas curvas aplicando los instrumentos algebraicos y analíticos desarrollados unos siglos más tarde. Nos referimos a la *espiral logarítmica,* la *curva útil para los arquitectos* y la *línea en forma de concha*. En la parte final del capítulo analizamos un fragmento de la obra en el que pretendemos hallar indicios de la formulación de un círculo osculatriz. En la mayoría de los casos presentaremos literalmente la propuesta de Durero acompañada de una paráfrasis que hace más fácil el seguimiento del tosco lenguaje en el que se presentan las construcciones. Así mismo, varias construcciones se dividen en una propuesta discreta, sugerida por el autor, acompañada de otra que permite desarrollar la construcción en un ambiente continuo. Esta última modelación es una propuesta de los autores de la investigación. Para el seguimiento completo de la construcción continua es muy importante contar con el auxilio de *Cabri*.

El capítulo 2 se centra en las figuras cónicas. Presentaremos primero el análisis que en el Libro IV de *De la medida* Durero adelanta a propósito del clásico problema relacionado con la exigencia de duplicar un cubo dado. Como veremos en el capítulo, los griegos llegaron a concebir que la solución completa del problema de la duplicación del cubo dependía de nuestra habilidad para hallar el punto de corte entre tres cónicas. Estudiaremos allí las propuestas del artista alemán orientadas a construir instrumentos que permiten amplificar cualquier cubo dado si ya sabemos de antemano amplificar uno en particular. Después nos ocuparemos del novedoso procedimiento de análisis ideado por Durero y presentado en el Libro I de *De la medida*, para concebir una cónica a partir de sus esquemas en planta y alzado, esquemas estos aplicados por los arquitectos y algunos pintores, como Piero della Francesca, para resolver problemas asociados con la representación tridimensional de edificios o cuerpos regulares. Finalmente, emplearemos el tratamiento particular que Durero ofrece a propósito de las cónicas para solucionar el problema de la duplicación del cubo. La construcción de las cónicas está igualmente desarrollada en un esquema discreto y una presentación continua.

El capítulo 3 se detiene en la construcción de polígonos regulares presente en el Libro II del *Tratado* de Durero. En la primera parte estudiamos las fuentes euclidianas relacionadas con la construcción de polígonos regulares. De vital importancia resulta la presentación de las propiedades de la razón media y extrema estudiadas por Euclides. Pacioli denominó dicha relación con el insinuante epígrafe de la *divina proporción*, y en el siglo XIX llegó a ser conocida como la *razón áurea*. En la segunda parte nos tomaremos la libertad de ausentarnos del período de nuestro interés para mostrar el fundamento de las pruebas de imposibilidad desarrolladas por los matemáticos del siglo XIX y que condujeron a probar que no es posible construir un heptágono regular valiéndonos para ello de regla y compás. Esta digresión nos permite entender, y al mismo tiempo valorar, los infructuosos esfuerzos de Durero por construir polígonos regulares de 7, 9, 11 y 13 lados. La lectura de esta segunda parte no es absolutamente necesaria para la comprensión general de las tesis que se presentan en el libro. En la última parte nos ocupamos directamente de los métodos propuestos por Durero. En cada caso formularemos las críticas a las que haya lugar; desentrañaremos la dificultad en una de las propuestas de construcción del pentágono regular; mostraremos el carácter limitado de la construcción de los polígonos de 7, 9, 11 y 13 lados, y acompañaremos la presentación con los métodos desarrollados por Kepler para mostrar la imposibilidad de la construcción del heptágono regular. Finalizaremos con un análisis de la propuesta de Durero orientada a la trisección de cualquier sector circular y las críticas que dicho procedimiento despertó en Kepler.

El capítulo 4 se ocupa de la construcción de cuerpos tridimensionales presentes en el Libro IV de la obra de Durero. En la primera parte nos detenemos en la construcción de sólidos platónicos; exploraremos primero las construcciones euclidianas y los orígenes del misticismo platónico asociado con dichos cuerpos; presentaremos los aportes de Piero della Francesca y la propuesta de Durero de ofrecer un esquema plano que articula las conexiones estructurales entre vértices y aristas, propuesta que se conocerá más tarde con el nombre de *desarrollos*; formularemos objeciones a algunas de las presentaciones en planta y alzado sugeridas por Durero; estudiaremos también la propuesta de Kepler de fundamentar su cosmología en los sólidos platónicos. En la segunda parte nos detenemos en el análisis de los sólidos arquimedianos. En este caso presentamos primero la demostración de Kepler que reduce a 13 el número de cuerpos arquimedianos; de hecho respetamos los nombres ideados por el astrónomo. A continuación exhibimos los desarrollos de Durero y los análisis de Luca Pacioli y Piero della Francesca.

El capítulo 5 está dedicado a la historia de los orígenes de la perspectiva. El análisis se divide en tres secciones. En la primera nos ocupamos del *Tratado sobre la pintura*, escrito por Alberti en 1436. En la segunda nuestro interés se dirige hacia el *De prospectiva pingendi* de Piero della Francesca, escrito en 1474; estudiamos también el interés que dichos métodos suscitaron en la comunidad de matemáticos profesionales, especialmente Benedetti y Desargues. En la última parte analizamos las variaciones que Durero propuso a los métodos de Piero della Francesca, consignadas en el Libro IV de su *Tratado sobre la medida*.

El capítulo 6, en su totalidad, reúne una contribución de la profesora Nathalie Dussan y se concentra en el impacto y la importancia de los instrumentos de perspectiva propuestos por Durero en la parte final del *Underweissung der Mesung.* El análisis gravita principalmente alrededor del porticón de Durero y su influencia, no solo en el ámbito pedagógico, sino también en el desarrollo de disciplinas ajenas a la pintura. Se defiende la posibilidad de contemplar el porticón a la manera de un instrumento científico.

El libro finaliza con un apéndice que se ocupa de la naturaleza de la geometría y su relación con otras disciplinas.

Figura 7. Durero: *Autorretrato,* 1493. Musée du Louvre, París

CAPÍTULO 1

Espirales

El primer libro del *Unterweisung der Messung* es rico en la presentación de nuevos objetos geométricos. Decimos nuevos, para el restringido inventario de objetos euclidianos. Durero no tiene inconveniente en agregar a los clásicos objetos geométricos una familia completa de espirales, que incluye aplicaciones pictóricas y la propuesta de una incipiente espiral logarítmica, una familia de curvas que se construyen a partir de modelos dinámicos (la *curva útil para los arquitectos,* la *línea en forma de concha* y la *línea arácnea,* entre otras), y la propuesta de construcción de un huevo bien formado. Un siglo antes de que Descartes le diera carta de nacimiento a las curvas algebraicas, Durero no vio inconveniente en reunir en el mismo recinto a los objetos euclidianos, las curvas arquimedianas y algunas curvas dinámicas. Su intención, como hemos indicado en la introducción, era más pedagógica que polémica o dogmática. El estilo del libro se acopla al de muchos tratados de la época que pretendían acercar en una forma más amplia los métodos y las tradiciones de la geometría y las matemáticas a las nuevas generaciones. El *Trattato d'abaco* y el *Libellus de quinque corporibus regularibus,* de Piero della Francesca, y *La divina proporción,* de Luca Pacioli, pertenecen a dicha estirpe.[1] La influencia de las nuevas tradiciones mercantiles exigía que un número mayor de personas tuviese conocimiento seguro de una masa crítica de resultados matemáticos elementales. La pasión de Durero por las curvas dinámicas en forma de espiral no solo se refleja en el número de páginas dedicadas al tema en su *Tratado*, sino también en el esmero con el que asumió algunos grabados y pinturas que debían presentar cabelleras ensortijadas: sus autorretratos de 1496 y 1500; el *Retrato de una joven veneciana*, de 1505; *El apóstol Felipe*, de 1516, *San Jerónimo*, de 1521.[2]

La introducción del Libro I en nada difiere de la presentación inicial en la mayoría de tratados de la época. Se hace alusión a los objetos que poseen longitud aunque carecen de anchura y grosor, luego a los que tienen longitud y anchura; y, por último, se mencionan los que detentan longitud, anchura y grosor. El principio de todos ellos es el punto. Este hecho lleva a los autores a sugerir algún tipo de definición intuitiva de punto. Todos coinciden, entre ellos Durero, en advertir que un punto es algo que carece de tamaño, longitud, anchura o grosor, y parecen no sorprenderse al admitir que a partir de esos elementos sin forma se pueda llegar a constituir todas las estructuras en el espacio tridimensional.[3] Un punto en movimiento ha de dar origen a una línea (una longitud sin anchura).[4] De manera análoga, el plano se construye a partir de una longitud que en un barrido genera anchura, y los cuerpos se generan al agregar la altura a la anchura y a la longitud.

---

1 Para un análisis cuidadoso de la obra de Piero della Francesca, el lector puede remitirse a la excelente monografía de Judith Field. Véanse también Grendler, P., 1995; Kemp, M., 1995.

2 Al final del capítulo puede apreciarse una reproducción del *San Jerónimo*. El esmero con el que Durero asumía los detalles de sus cuadros, especialmente los cabellos ensortijados, motivó la solicitud que le hiciera el pintor veneciano Giovanni Bellini en 1506. El pintor le pidió a Durero uno de los pinceles con el que lograba dejar plasmados varios hilos de cabellera con un solo trazo; Durero se limitó a exhibir un pincel corriente, de los que ya se usaban en Venecia. Véanse Bailey, M., 1995, p. 122; Bartrum, G., 2002a, p. 13.

3 Veamos, pues, las definiciones de los autores más destacados. Alberti: «*Sostengo, primero que todo, que nosotros podemos saber que un punto es una figura que no puede ser dividida en partes. Yo reconozco una figura como algo localizado sobre un plano de tal modo que el ojo pueda verlo. Nadie negaría que el pintor no tiene nada que hacer con cosas que no sean visibles. El pintor se ocupa únicamente de representar lo que puede ser visto. Si se unen estos puntos uno a uno en una fila, ellos formarán una línea. Una línea es una figura cuya longitud se puede dividir, pero cuya anchura es tan fina que no puede ser partida... La reunión de líneas, como hilos que se reúnen en un vestido, constituyen un plano*» (Alberti, L. B., 1956, pp. 43-44). Piero della Francesca: «*Dirò adunqua puncto essere una cosa tanto picholina quanto è posibile ad ochio comprendere; la line dico essere extensione da uno puncto ad un altro, la cui larghezza è de simile natura che è il puncto. Superficie dico essere larghezza et longhezza compresa da le linee*» (Francesca, Piero della, 1984, p. 65). Leonardo da Vinci: «*Todos los problemas de la perspectiva se hacen más claros por los cinco términos de los matemáticos, a saber: el punto, la línea, el ángulo, la superficie y el sólido. El punto es único en esta clase. El punto carece de altura, anchura, longitud o profundidad, de ahí que deba ser observado como indivisible y carente de dimensiones en el espacio. La línea es de tres clases, recta, curva y sinuosa, y no es ni ancha ni alta ni profunda. Por lo tanto es indivisible, excepto en su longitud, y sus extremos son dos puntos*» (Vinci, Leonardo da, 1970, § 42). Todas las anteriores son paráfrasis de las primeras seis definiciones de los *Elementos* de Euclides.

4 Durero sugiere un trazo simple para representar una línea y se refiere a este con nostalgia (o quizá melancolía) platónica, como «*el modo en el que el entendimiento interior debe mostrarse en la obra exterior*» (*DM*, I, p. 133).

Cuando Durero termina de darse a sí mismo una ontología adecuada introduce la necesidad de la medida de los objetos así constituidos: «*Ahora que se ha informado de lo que son una línea, una anchura o plano y un* corpus*, esto es, un cuerpo, hay que saber que estos objetos, sean grandes o pequeños, se puedan medir con arte, pues la medida afecta tanto a lo que está lejos como a lo que está cerca*» (*DM*, I, p. 137). Después de la breve introducción, el pintor se ocupa del análisis y construcción de «*algunas líneas medidas*».

En el capítulo haremos un seguimiento de las curvas propuestas por Durero (espirales, concoides y curvas dinámicas); presentaremos el modelo de construcción discreta sugerido por el autor, complementado con el modelo de construcción continua auxiliados por *Cabri*. En algunos casos, a su propuesta literal anexaremos una paráfrasis que hace más clara la formulación de la curva en cuestión. El seguimiento de la espiral logarítmica, de la curva útil para los arquitectos y de la línea en forma de concha, nos conducirá a utilizar herramientas matemáticas no disponibles para el artista alemán.

1.1 Espiral de Arquímedes-Durero

Descripción recomendada por Durero

Después de sugerir una primera espiral sencilla (Libro I, construcción 6), Durero propone al lector otra, ajustada a la siguiente descripción:

> La comienzo en el centro, desde donde se puede hacer tan larga como se quiera, pero teniendo en cuenta que el espacio existente entre las espiras siempre será el mismo, salvo en la primera. Esta espiral la hago de la siguiente manera. Pongo un punto *a* y trazo una circunferencia tan grande como quiero hacer el desarrollo de la espiral, y divido esta línea circular con 12 puntos en 12 partes iguales. A continuación trazo desde el centro *a* una línea recta hasta la parte superior de la circunferencia, cuyo extremo será *b*. En este mismo punto pongo el 12 y comienzo a numerar hacia la mano izquierda –1, 2, 3, etc.– los puntos que dividen la circunferencia hasta dar la vuelta y llegar de nuevo al 12. La línea recta *ab* la divido con 23 puntos en 24 partes iguales y comienzo a numerar en *a* –1, 2, 3, etc.–. Luego tomo una regla recta y marco en ella los puntos de la mencionada línea *ab*, designándolos por su número. La coloco con su extremo *a* en el centro *a* y con el extremo *b* en el punto 1 de la circunferencia, y, donde indique el punto 1 de la regla, pongo otro 1. Así voy girando por todos los puntos de la circunferencia dejando la regla siempre fija en el centro *a*; de este modo los puntos de la regla indican todos los puntos de la espiral con los números donde se deben poner. Si te fijas en los números, no te puedes equivocar. Pero si la línea da dos vueltas, y en la circunferencia hay 12 puntos y en la regla que va girando 23, ten cuidado de que los números de la regla guarden un orden, de modo que al número 1 le corresponda el 13, al 2 el 14, al 3 el 15, al 4 el 16, al 5 el 17, al 6 el 18, al 7 el 19, al 8 el 20, al 9 el 21, al 10 el 22, al 11 el 23 (*DM*, I, p. 138).

Paráfrasis de la construcción

1) Se construye una circunferencia de centro A y radio arbitrario.
2) Se dibuja uno de los radios de la circunferencia (AB).
3) Se divide el radio en 24 partes iguales.

4) Se trazan 23 nuevas circunferencias con centro A y radio ajustado a las divisiones señaladas en el segmento AB.
5) Se divide la circunferencia inicial en 12 arcos iguales, a partir de B.
6) Se trazan los 12 radios correspondientes.
7) A continuación se marcan los puntos de la telaraña ajustados al siguiente procedimiento: desplazándose desde el centro a la periferia y moviéndose en la dirección contraria a las manecillas del reloj, a partir del radio AB, se seleccionan las intersecciones sucesivas entre circunferencias y radios trazados.
8) La espiral es la curva sobre la cual anidan los puntos seleccionados que se ajustan a la regla de construcción.[5]

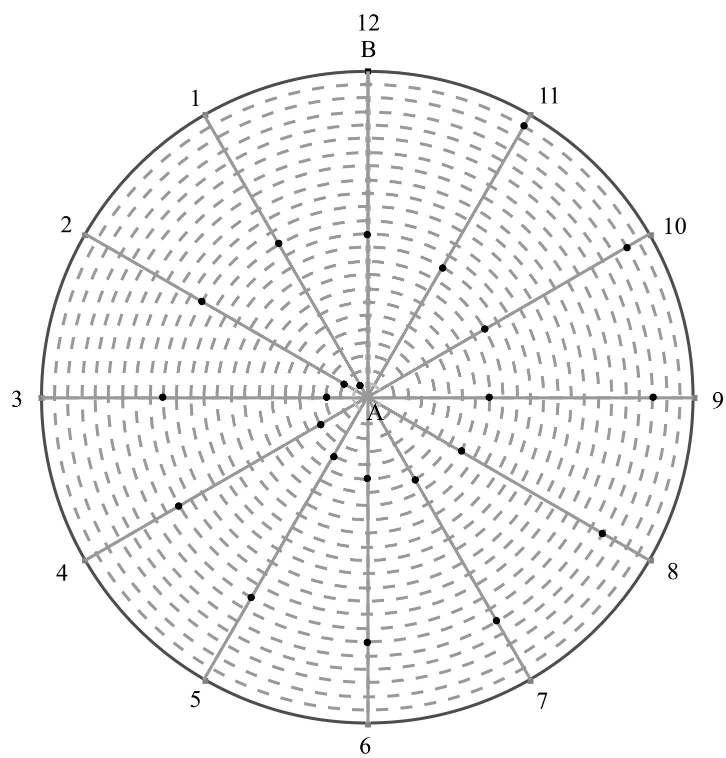

Figura 1.1. Espiral de Arquímedes-Durero (forma discreta)

Construcción continua

El procedimiento descrito por Durero nos permite seleccionar 24 puntos que se ajustan a la regla de construcción de una espiral de Arquímedes.[6] Esta cantidad es suficiente para que el lector forme una imagen conjunta de la curva generada. Si aumentamos el número de divisiones, conservando la relación 1:2 (entre las divisiones de la circunferencia y las del radio) para que la espiral complete dos vueltas, obtendremos una serie de puntos más abigarrados, serie que mejora nuestra percepción

5 El lector puede consultar la construcción paso a paso en el CD, Cap. I, Figura 1.1.

6 En la época de Durero no existía aún una publicación en alemán de la obra de Arquímedes. Es probable que Durero tuviese conocimiento de esta a través de su amistad con J. Werner (1468-1528), quien tenía en sus manos la traducción al latín realizada por Jacob von Cremona. Véase Hofmann, von J. E., 1971, p. 91, n. 16.

de conjunto de la espiral. No obstante, aún estaremos lejos de la curva que perseguimos.[7] Ahora bien: si se quiere un trazado continuo de la curva debemos concebir la posibilidad de dividir la circunferencia y el radio en un número ilimitado (tan grande como se quiera) de fragmentos.

Propondremos a continuación un modelo de construcción continua para la espiral de Arquímedes-Durero. La base de la construcción es una circunferencia y alguno de sus radios AB (de longitud R). Imaginemos un punto D que se puede desplazar libremente desde el centro de la circunferencia a lo largo del segmento AB; imaginemos también que dicho punto se desplaza con una velocidad constante.[8] Transcurrido cierto tiempo *t,* dicho punto se habrá desplazado una distancia $r = vt$ sobre el segmento. A continuación podemos trazar una circunferencia de centro A y radio *r*, de modo que el desplazamiento del punto D está acompañado del ensanchamiento de esta circunferencia. En forma simultánea, concebimos el desplazamiento de un segundo punto C que, partiendo del extremo B, se mueve sobre la circunferencia de radio *R*, en dirección contraria a las manecillas del reloj, de tal manera que la distancia recorrida sobre la circunferencia resulte 4π veces mayor que el desplazamiento del punto D. El movimiento de este punto será acompañado por la rotación de una semirrecta que contiene al origen de las circunferencias y al punto C.[9] El desplazamiento del punto P, resultado de la intersección entre la semirrecta y la circunferencia que acompaña a D, genera la espiral de Arquímedes-Durero.[10]

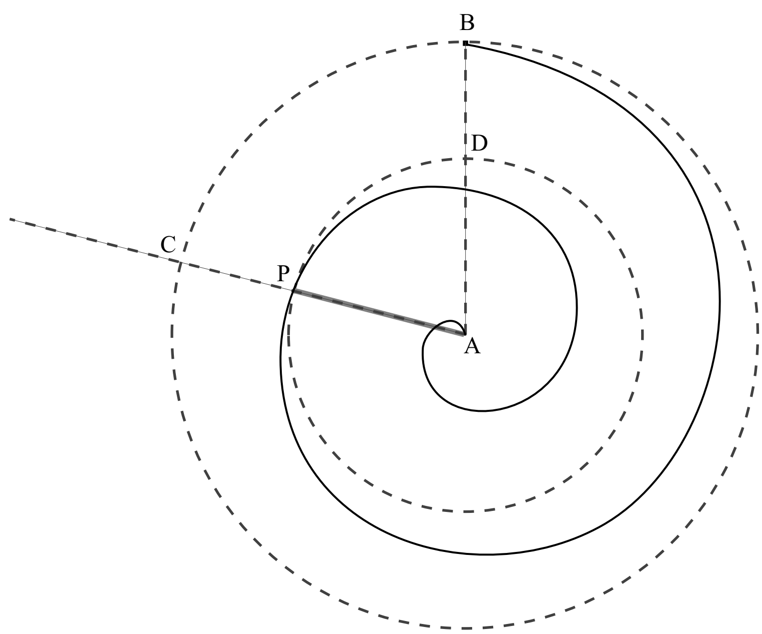

Figura 1.2. Espiral de Arquímedes-Durero (forma continua)

7 La curva que perseguimos es aquella que recoge todos los puntos vecinos que se ajustan a la regla de construcción propuesta por Durero.

8 La constancia de la velocidad no es una condición necesaria para la construcción de la espiral.

9 El ángulo θ barrido por la semirrecta se puede expresar de la siguiente manera: $\theta = (4\pi r) / R$; si el punto C recorre una distancia igual a $2\pi r$ y se sigue el mismo procedimiento, se obtiene una espiral de una vuelta.

10 La construcción continua puede seguirse en el CD. El punto D se puede desplazar a voluntad: Cap. I, Figura 1.2.

Aplicaciones de la espiral

De las aplicaciones propuestas por Durero hemos seleccionado algunas que, de manera bastante detallada, están presentes en el libro. La primera de ellas se denomina por su forma *espiral con hojas* (*DM*, I, p. 142). En esta aplicación hemos tomado como base la construcción continua de la espiral de Arquímedes-Durero, descrita en el apartado anterior. La circunferencia que la genera se divide en 12 partes iguales y se trazan los seis diámetros correspondientes. De esta manera se obtienen 24 puntos de intersección entre los diámetros y la espiral. Desde el centro de la espiral hacia el exterior, ubicados sobre cada uno de los puntos de intersección, se trazan hacia afuera dos arcos de circunferencia, de radio igual a la distancia entre los dos puntos consecutivos considerados. Así, la intersección de ambos arcos señala el ápice de cada hoja y de esta manera se construyen las 24 hojas que rodean y adornan el recorrido de la espiral.[11]

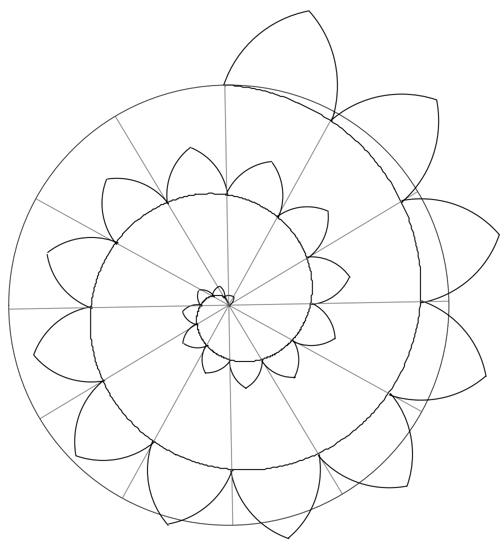

Figura 1.3. Espiral con hojas

*

A continuación se describe la segunda aplicación, denominada por Durero *báculo episcopal* (*DM*, I, p. 143). De nuevo, su base es la construcción continua de la espiral, restringida esta vez a una vuelta. La circunferencia se divide en 12 partes iguales, y al trazar los seis diámetros correspondientes se determinan 12 puntos de intersección con la espiral. Estos se pueden numerar a partir del primer punto de intersección con la espiral sin considerar el centro. El trazo de las hojas se obtiene de acuerdo con el siguiente proceso: ubicado en el centro de la espiral y a continuación en el primer punto de intersección, se trazan dos arcos hacia el exterior de radio igual a la distancia del centro al primer punto de intersección, de esta forma se construye la primera hoja. Luego nos ubicamos en dos puntos impares sucesivos y trazamos dos arcos hacia el exterior, de radio igual a la distancia entre ambos puntos. La intersección de los dos arcos determina el ápice de cada hoja que bordea la espiral. Al terminar con los puntos de intersección entre la espiral y los diámetros, el proceso se continúa, aplicando la misma regla, con los puntos de intersección entre la circunferencia y los diámetros, hasta completar nueve hojas. Las tres últimas bordean el exterior de la circunferencia.

[11] Véase CD, Cap. I, Figura 1.3.

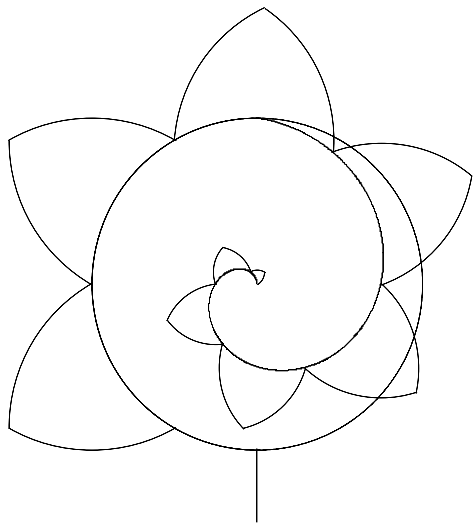

Figura 1.4. Báculo episcopal

*

La tercera aplicación, denominada *línea para labores de follaje* (*DM*, I, p. 143), se elabora de la siguiente manera: se replica el procedimiento anterior pero se dejan de construir las tres últimas hojas que caen sobre la circunferencia y se sustituyen por una más pequeña hecha entre los dos últimos puntos de intersección, entre los diámetros y la espiral. Aunque Durero no plantea una regla de construcción para hacer la rama que sostiene el follaje, representada en el texto a partir de un trazo libre, nos hemos tomado la libertad de ajustarla a una regla que permita conservar las invariantes que hacen posible la manipulación con *Cabri*.

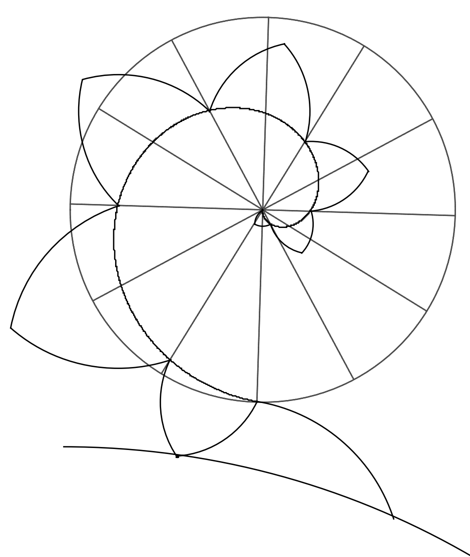

Figura 1.5. Línea para labores de follaje

*

La última aplicación de la espiral de Arquímedes-Durero que presentaremos es la línea con la cual se hace una escalera de caracol: *proyección vertical de la espiral en planta* (*DM*, I, p. 146). Exploraremos primero la construcción discreta de Durero, y a continuación ofreceremos una propuesta continua ajustada a la regla de construcción del pintor. Se traza primero la planta de la espiral y luego se proyecta verticalmente. La construcción se inicia con el trazado continuo de la espiral de una vuelta. Se divide la circunferencia en 12 partes iguales y se trazan los seis diámetros correspondientes (Figura 1.7). La intersección de estos diámetros con la circunferencia y con la espiral determina 24 puntos que se numeran en orden inverso a partir del centro A de la espiral (12 puntos caen sobre la espiral y 12 lo hacen sobre la circunferencia exterior). Se traza una semirrecta *l* que se origina en el punto 6 y pasa por el punto 12, y a continuación se traza un segmento CD perpendicular a la semirrecta, ubicado en cualquier sector de tal forma que este no traslape la circunferencia. El punto de intersección semirrecta-segmento lo nombramos con la letra B. A partir de este punto se marcan sobre la semirrecta 24 puntos ajustados a la siguiente regla:[12] i) construir un triángulo rectángulo de dimensiones arbitrarias y trazar un arco interior con centro en cualquiera de los vértices que cae sobre la hipotenusa y radio igual al cateto correspondiente; ii) dividir el arco en 24 partes iguales;[13] iii) trazar semirrectas originadas en el centro del arco y que pasan por las divisiones anteriormente mencionadas; iv) marcar las intersecciones de estas semirrectas con el cateto opuesto al centro del arco y numerarlas en orden ascendente; v) trasladar este cateto, con sus divisiones, a la semirrecta *l* a partir del punto B en la dirección que no se traslapa con la espiral.

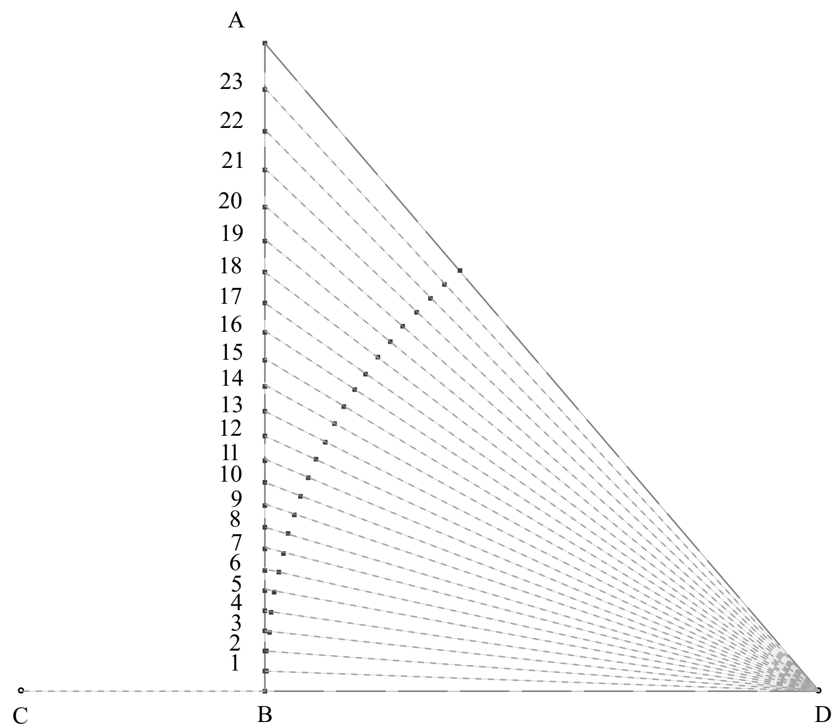

Figura 1.6. División de un arco con base en un triángulo rectángulo

[12] Conviene aclarar que Durero al comienzo recomienda una división en partes iguales, mas al final del proceso menciona una regla de construcción, a la cual nos ajustaremos, que divide el segmento en una proporción creciente, contradiciendo la recomendación inicial (Figura 1.6).

[13] Durero no advierte dificultad alguna para dividir en 24 partes iguales cualquier arco de circunferencia. El pintor pasa por alto que ello implicaría la posibilidad de trisecar cualquier arco. No obstante, cree estar en posesión de un método seguro para trisecar cualquier arco (*DM*, II, p. 197).

Para trazar la proyección vertical se sigue el proceso indicado a continuación: proyectamos el punto 1 de la espiral en forma paralela a la semirrecta *l*, trazamos una perpendicular a la semirrecta *l* que pase por el punto 1 de la misma, y ubicamos la intersección de las dos proyecciones y registrada con el número 1. Este proceso se repite para cada uno de los 24 puntos iniciales. Así se obtienen los 24 puntos de la proyección vertical. No obstante, aún no sabríamos cómo recoger la curva envolvente.[14] Durero no tiene inconveniente en sugerir una construcción a mano alzada. Sin embargo, propondremos esquemas de modelación continua.

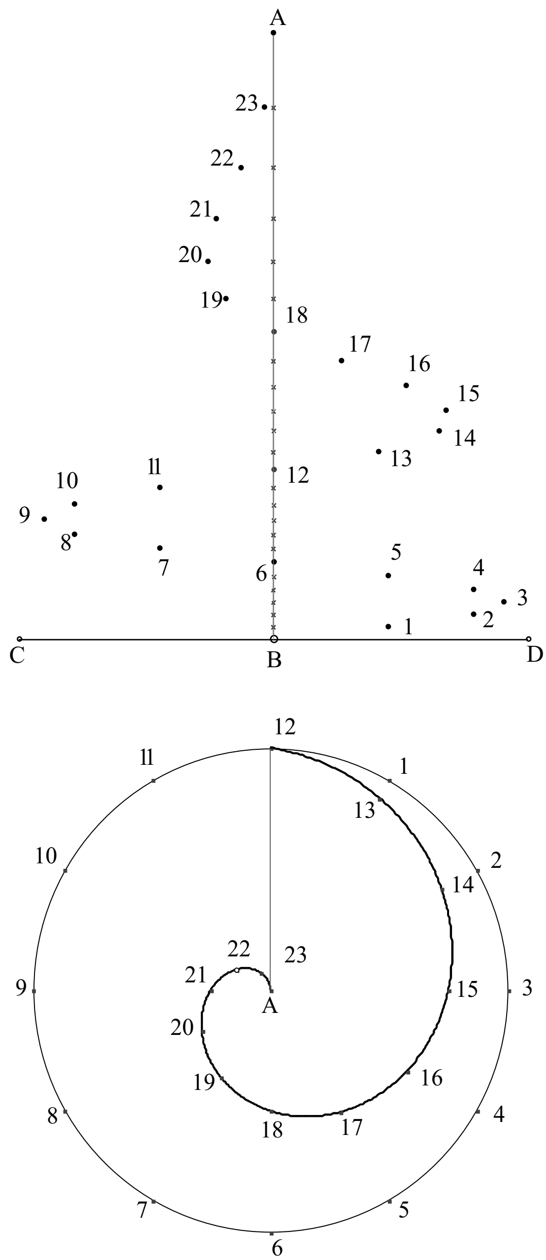

Figura 1.7. Proyección vertical de la espiral de Arquímedes-Durero

[14] Usamos el término *envolvente* de una manera laxa, queremos referirnos a la curva que recoge todos los puntos que se ajustan a una regla de construcción.

Esta aplicación conduce a una figura que bien podría simular el ascenso por una escalera en forma de caracol con escalones que se hacen cada vez más altos. Presentamos la modelación en forma continua a partir de la cual se puede derivar la construcción discontinua que recomienda Durero. Empezamos por trazar la circunferencia matriz de radio R y centro O a partir de la cual se elabora completamente una espiral de una vuelta.

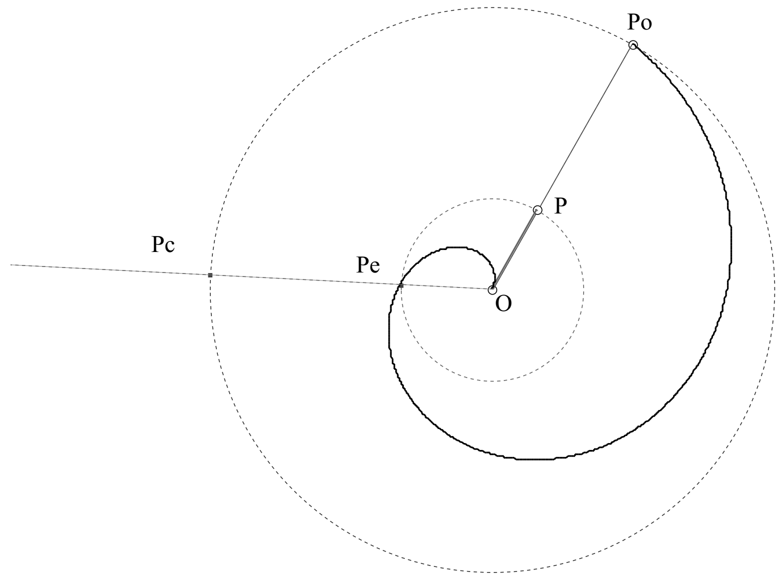

Figura 1.8. Construcción continua de la espiral

Con el ánimo de construir directamente las proyecciones, trazamos paralelas a AP_o que pasan primero sobre P_e y, a continuación, sobre P_c. Construimos un segmento perpendicular a la vertical de tal manera que pase sobre un punto B y no traslape ninguna de nuestras construcciones iniciales (Figura 1.9a). A partir de un punto arbitrario sobre el segmento construimos el triángulo rectángulo arbitrario A'BC[15] y bisecamos el ángulo BCA' (sea α la medida de dicha bisectriz y D el punto de corte de la bisectriz con la vertical). El triángulo se construye para replicar las divisiones sugeridas por Durero en la plantilla recogida en la Figura 1.6 y la bisectriz es importante para distinguir entre la zona en la que se proyecta la circunferencia y aquella en la que se proyecta la espiral. La proporción entre el ángulo P_oOP_c y la circunferencia completa es igual a la proporción entre r y R.[16] Sea n = med(P_oOP_c)/2π= r/R. Calculamos la medida de un nuevo ángulo $\beta = n\alpha$, de tal manera que β guarda con α la misma proporción que P_oOP_c guarda con la circunferencia completa. Ahora hacemos rotar los segmentos A'C y DC alrededor de C un ángulo equivalente a β, y determinamos los puntos de corte de estos segmentos rotados con la vertical. A partir de esos puntos trazamos un par de perpendiculares a la recta vertical. Allí donde la perpendicular trazada sobre el punto originado por la rotación de CD corte la paralela trazada a partir de P_c, se obtendrá el punto de la proyección de la circunferencia, mientras que el punto de cruce entre la perpendicular trazada sobre el punto originado por la rotación de CA' y la paralela trazada sobre P_e definirá la proyección de la espiral de acuerdo con la regla de construcción ideada por Durero.

15 El punto A' es la proyección vertical de A.

16 La medida en radianes de P_0OP_c (θ) es igual al cociente entre el arco de circunferencia ($\widehat{s}$) y el radio R. A su vez, el arco descrito, en virtud de la regla de construcción de la espiral, es igual a $2\pi r$. Por lo tanto, el cociente entre el ángulo y la circunferencia completa (($2\pi r$ / R) / 2π) es igual a r / R.

UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ
JORGE TADEO LOZANO

Universidad de Bogotá
JORGE TADEO LOZANO