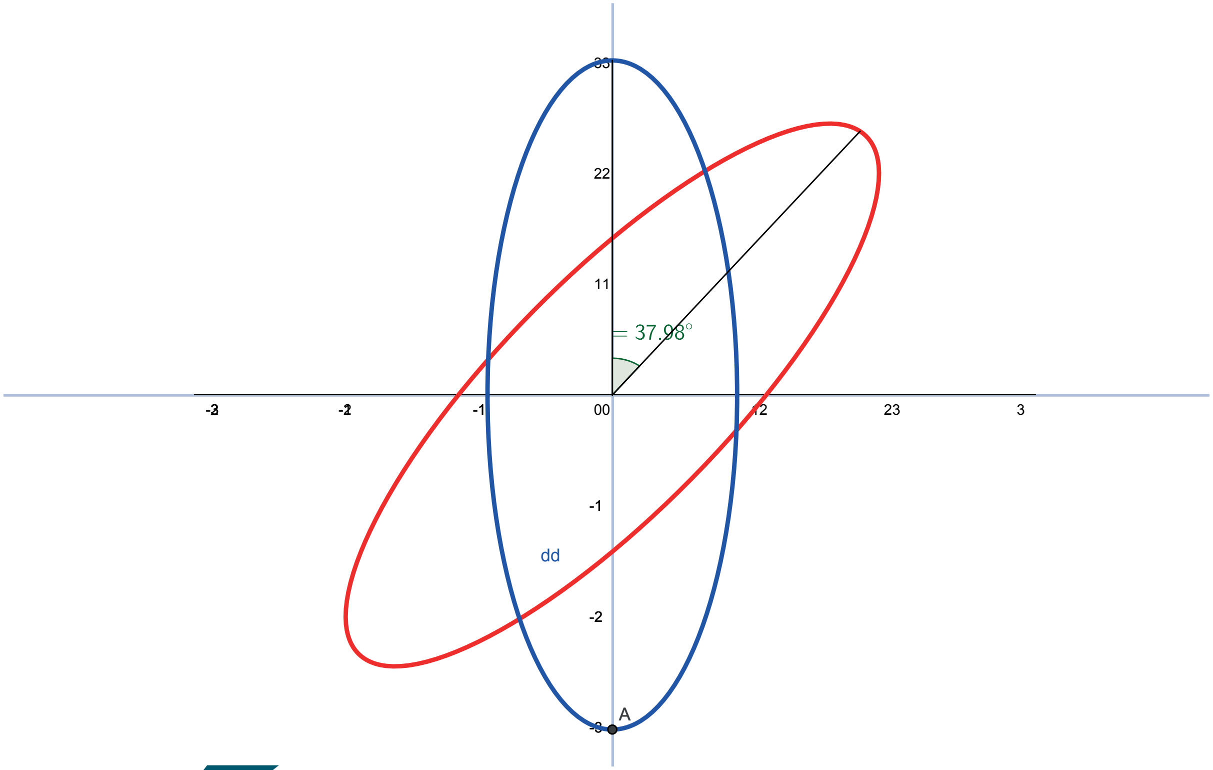


Álgebra lineal

Modelación, solución de problemas y ejercicios

Sandra Patricia Barragán Moreno | Julio César Melo Martínez | Orlando Aya Corredor

EDITORIAL UTADEO

Sandra Patricia Barragán Moreno

Doctora en Modelado para la política y la gestión pública por la Università degli Studi di Palermo y por la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano y Magister en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Sandra es profesora de tiempo completo de la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano.

ÁLGEBRA LINEAL

Modelación, solución de problemas y ejercicios

EDITORIAL UTADEO

Barragán Moreno, Sandra Patricia
Álgebra Lineal : modelación, solución de problemas y ejercicios / Sandra Patricia Barragán Moreno, Julio César Melo Martínez, Orlando Aya Corredor. - Bogotá: Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, 2021.
264 páginas : ilustraciones, figuras, gráficas, fórmulas, tablas ; 22 cm.

ISBN: 978-958-725-317-7
1. Álgebras lineales - Problemas, ejercicios, etc. 2. Algebra lineal con ayuda de computadores. 3. Teoría de las matrices. 4. Espacios vectoriales. 5. Transformaciones (Matemáticas). I. Melo Martínez, Julio César, autor. II. Aya Corredor, Orlando, autor. III. Tít.

CDD 512.5

Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano
Carrera 4 Nº 22-61 - PBX 2427030 - www.utadeo.edu.co

Álgebra Lineal. Modelación, solución de problemas y ejercicios

ISBN: digital: 978-958-725-317-7
DOI: https://doi.org/10.21789/9789587253177

Edición:
Adecuación pauta gráfica y cubierta: Luis Carlos Celis Calderón
Diagramación: Francisco Javier Jiménez Montero
Diseño de carátula y pauta gráfica: Juanita Giraldo
Corrección de estilo: Hernando García Bustos
Coordinación editorial: Mary Lidia Molina Bernal

Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano | Vigilada Mineducación. Reconocimiento de personería jurídica: Resolución N°. 2613 de 14 de agosto de 1959, Minjusticia.
Acreditación institucional de alta calidad, 6 años: Resolución 4624 del 21 de marzo de 2018, Mineducación.

ÁLGEBRA LINEAL

Modelación, solución de problemas y ejercicios

Sandra Patricia Barragán Moreno
Julio César Melo Martínez
Orlando Aya Corredor

Contenido

1 INTRODUCCIÓN

El libro de modelación que presentamos es un esfuerzo pedagógico basado en nuestra experiencia como profesores de la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano. La primera intención de este libro es poner a disposición de los estudiantes de un curso introductorio al álgebra lineal diferentes tipos de situaciones problema y ejercicios tanto resueltos como propuestos que consideramos en el núcleo del entendimiento de esta asignatura.

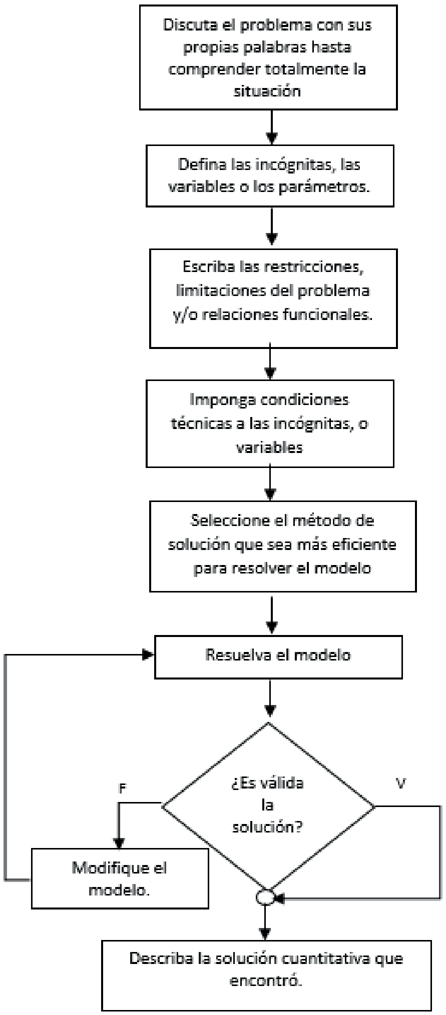
Hemos considerado un acercamiento a los temas usuales tratados en un primer curso de álgebra lineal a través de una mezcla en iguales proporciones del trabajo algorítmico, conceptual y de manejo de software que obren en beneficio de la modelación matemática. El objetivo que nos mueve es que al finalizar un curso introductorio al álgebra lineal el estudiante que lo curse esté en capacidad de utilizar las herramientas conceptuales y procedimientos de la teoría de matrices y las transformaciones lineales para la modelación matemática y resolución de problemas cuya base corresponda al álgebra lineal.

Reconocemos la trascendencia de libros clásicos y estándar para cursos de ingeniería como los de Anton (Anton, 1984), Grossman (Grossman, 1996) y Kolman (Kolman & Hill, 2013) y por eso los tomamos como libros de referencia y guía. Nuestro trabajo consistió en acercar a nuestros estudiantes al álgebra lineal mediante ejercicios resueltos propios a partir de la teoría que en libros de los mencionados autores se desarrolla. Para el planteamiento de modelos, aplicaciones y problemas, así como de sus soluciones hemos empleado nuestro conocimiento disciplinar y nuestra experiencia pedagógica para identificar puntos álgidos en la asimilación de los principales temas del álgebra lineal. También hemos aplicado la técnica de diseño de casos de Vargas et al., quienes promueven la construcción de preguntas en un contexto aplicado que pueden ser absueltas en actividades sincrónicas y colaborativas en las que los estudiantes ejercitan sus competencias conceptuales y argumentativas en el campo de las matemáticas (Vargas, Rodríguez, Bernal, Muñoz, & Gutiérrez, 2012, págs. 121-126).

Hemos dividido el libro en 16 secciones en las que abordamos los temas básicos a través de ejemplos, ejercicios resueltos, ejercicios propuestos, modelación matemática y preguntas de tipo Saber Pro (como las del examen estatal). Incluimos tres autoevaluaciones con diferentes tipos de preguntas diseñadas conforme a Barragán et al. (Barragán, Bogoya, Contento, & Ocaña, 2014) que pueden orientar al estudiante en lo que sería un típico examen parcial o final. Adicionalmente, recomendamos recursos informáticos como videos explicativos elaborados por nosotros, aplicativos y calculadoras disponibles en internet. Los Aplicativos los hemos encontrado en la actividad con otros profesores y con los estudiantes de nuestros cursos. Fueron los estudiantes, quienes nos los sugirieron en primera instancia para que nosotros los revisáramos y los hiciéramos extensivos a sus compañeros. De esto se trata la interacción en los cursos, de construir experiencia y conocimiento entre los participantes.

Para las situaciones que tienen su base en el álgebra lineal se propone una metodología diseñada por nosotros para el planteamiento de modelos con base en la de Mathur & Solow para el planteamiento y solución de modelos de la investigación de operaciones (Mathur & Solow, 1996, págs. 4-9); esta metodología ha sido sometida a consideración de la comunidad académica con éxito, logrando publicaciones y conferencias internacionales (Barragán & Cala, 2019), (Barragán, 2019). Con el ánimo de sistematizar y organizar el pensamiento orientado hacia la modelación, es crucial trabajar en cada uno de los pasos que muestra la Figura 1, sin eludir ninguno de ellos por elemental que le pueda parecer. Todas ellas hacen parte del engranaje para el montaje y solución del modelo.

Figura 1. Metodología sugerida para el planteamiento de modelos.



Fuente: Elaboración propia.

Hacemos esta propuesta de metodología porque, en los espacios de tutoría académica, algunos de nuestros estudiantes manifiestan que “en clase yo entiendo todo, pero cuando llego a mi casa e intento plantear modelos, yo solo, no puedo”, “yo puedo resolver los problemas, pero no los puedo plantear”. Estas frases nos hacen pensar en que requerimos material detallado que puedan consultar en el trabajo individual, que si bien no tiene la fórmula mágica puede servir como instrumento orientador.

Como se observa en la Figura 1 el hacer trabajo algorítmico, es decir, hacer operaciones matemáticas, es solo una parte de lo que hay que lograr para la modelación. No es ni más ni menos importante que las otras partes, es significativo hacer cuentas y hacerlas bien (ser eficiente al hacer cálculos) así como es importante contextualizarlas y poder ejecutarlas con software. Para entender en forma amplia los desafíos en la conceptualización más allá de los procedimientos algorítmicos hemos explorado trabajos académicos de otros autores que se ocupan tanto de los aspectos formales de la disciplina y de los pedagógicos para lograr la comprensión profunda de los conceptos y así mejorar el entendimiento de los fenómenos o situaciones problema (Aya, Echeverry, & Samper, 2016), (Contento, 2019).

Queremos finalizar esta introducción agradeciendo a nuestros colegas del equipo de trabajo de la coordinación de los cursos de álgebra lineal de la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano con quienes hemos crecido como profesionales de las matemáticas y de la docencia. También queremos agradecer a nuestros estudiantes que son los receptores de toda nuestra actividad en matemáticas y en pedagogía y que están presentes en nuestro legítimo interés en su proceso de aprendizaje.

2 GUÍA PARA EL ESTUDIANTE

El libro que tiene en sus manos se elaboró con la intención de apoyarlo en el estudio de clase y extra-clase con ejercicios resueltos y guiados para álgebra lineal. En nuestra comprensión de la modelación matemática y su metodología, le presentamos una estructura para el planteamiento de situaciones problema que tienen su base en los temas tratados en este curso.

Tienen a su disposición 16 secciones de trabajo. 13 de ellas tienen la organización que se muestra en la Figura 2. Cada sección tiene una introducción que explica de qué se tratan los ejercicios y los objetivos que se espera completar en ella. Tiene ejemplos resueltos con gran detalle y ejercicios guiados con la metodología que le sugerimos para realizar los ejercicios propuestos. Luego le proponemos algunas preguntas de tipo Saber Pro con respuesta y otras para que usted las conteste. Tenga en cuenta que al ser preguntas de una prueba con opciones múltiples lo que se espera es que usted marque la respuesta correcta, pero basándose en un razonamiento global, en oposición a convertir cada opción de respuesta en una pregunta más. Para los ejercicios propuestos como preguntas abiertas es conveniente que escriba todo el procedimiento después de haber hecho un breve plan de trabajo. No es muy eficiente hacer y hacer operaciones para ver si alguna se ajusta a lo que pide el enunciado.

Al finalizar la sección, le recomendamos algunos sitios web y otros recursos informáticos que contienen información teórica y técnica confiable, que usted puede usar para agilizar los cálculos siempre usando su conocimiento técnico para ingresar los datos y para juzgar los resultados.

Las restantes tres secciones tienen autoevaluaciones que le pueden orientar en lo que requiere refuerzo y en los objetivos que ya alcanzó.

Figura 2. Organización de cada sección de trabajo.

Fuente: elaboración propia con Canva.com

Algunas soluciones de los ejercicios se ven extensas, por favor no se desanime. Como se anunció, se espera que realmente sirvan como ilustración de la técnica de modelación y de la técnica matemática para resolver.

3 MATRICES, OPERACIONES Y PROPIEDADES

3.1 Introducción

Si bien las matrices tienen múltiples aplicaciones, esta sección usa como motivación su implementación para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Por ello, los objetivos de información están definidos sobre los sistemas de ecuaciones lineales conocidos y apuntan hacia los sistemas con tantas ecuaciones e incógnitas como se necesiten, así como a las matrices como objetos matemáticos que posibilitan su solución. Para tener un panorama completo se abordan las operaciones entre matrices y sus propiedades.

Como prerrequisitos para esta sección, se requiere recordar los métodos de solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que usualmente se estudian en la educación secundaria. Si más adelante está interesado en profundizar en la teoría, puede consultar el artículo de Melo, quien vincula las matrices con las esferas y los cuaterniones (Melo, 2005).

3.2 Objetivos de información

- Modelar una situación problema que tenga su base en los sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas con la metodología de la Figura 1, usando el formato de modelación (ver la página 79).

- Reconocer en los métodos de solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas aspectos que pueden ser generalizados a otros sistemas de mayores órdenes.
- Practicar las operaciones y las propiedades de las matrices.
- Reconocer los diferentes tipos de pregunta cerrada y abierta para cuestionarios con diferentes propósitos de evaluación.

3.3. Ejemplos resueltos

3.3.1. Primer ejemplo. Modelación. La situación problema que queremos abordar acá no es muy complicada y nos permite llevar a cabo todo el circuito de la modelación.

Para el ingreso a una exhibición de autos clásicos y antiguos se cobran \$8.500 por cada boleta para adulto y \$6.500 por cada boleta para adulto mayor. En un fin de semana con asistencia de 253 personas se recaudaron \$1.890.500. ¿Cuántos adultos y cuántos adultos mayores asistieron a la exhibición el fin de semana?

Solución:
Paso 1: Discusión del problema: Después de leer atentamente el problema debemos reinterpretarlo, parafraseando, comentando y explicando con expresiones verbales propias.

Entendemos en el problema que a la exhibición de autos clásicos y antiguos acudieron en total 253 personas el fin de semana (no dice nada sobre la asistencia de niños, por lo cual esto no se tendrá en cuenta). La exhibición tiene un precio especial para los adultos mayores, pues les cobra menos. El valor total de lo que recibió la exhibición de autos clásicos y antiguos, en la taquilla, por compra de boletas fue \$1.890.500.

Paso 2: Definición de las incógnitas presentes en el modelo. Hay que incluir la descripción completa de las incógnitas y, si es el caso, las unidades en que se miden. Para abrir paso a posibles sistemas de ecuaciones con muchas más incógnitas y ecuaciones, usaremos x_1 con $i = 1(\textit{adultos}), 2(\textit{adultos mayores})$ para nombrar las incógnitas, en vez de usar x y y por ejemplo. Puede imaginar lo que ocurriría en el segundo caso si tuviéramos que usar 40 incógnitas, no alcanzarían las letras del alfabeto.

x_1:= Número de adultos que asistieron a la exhibición en el fin de semana.
x_2:= Número de adultos mayores que asistieron a la exhibición en el fin de semana.

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema. Hay que tener en cuenta los constreñimientos que están afectando el problema. Es muy conveniente rotular las ecuaciones con frases que indiquen a qué hace referencia cada limitación. En caso de ser necesario, incluya las unidades de medida.

Total de personas que asistieron a la exhibición	$x_1 + x_2 = 253$
Total de dinero recaudado por venta de boletas	$8.500x_1 + 6.500x_2 = 1.890.500$

Paso 4: Condiciones técnicas: Imponga condiciones a las incógnitas definidas para que sus valores cuantitativos tengan sentido dentro de la modelación.

En este caso, como las incógnitas corresponden a número de personas, no pueden ser números negativos ni fraccionarios. Podrían ser iguales a 0, considerando, por ejemplo, que ningún adulto mayor asistió allí. Los valores aceptables serían

$$x_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ para } x_1(\textit{adultos}), x_2(\textit{adultos mayores})$$

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema (o el objeto matemático que represente la situación). Argumente la escogencia de este método.
En este caso, cualquiera de los tres métodos de solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas resulta apropiado teniendo en cuenta la eficiencia.

Es decir, con los tres métodos hay que hacer casi el mismo número de cálculos para obtener el resultado. Usaremos el método de sustitución. Solo empleamos el método gráfico cuando necesitamos tener una idea aproximada, y cuando necesitamos los valores exactos usamos métodos algorítmicos.

Paso 6: Resuelva el sistema (o el objeto matemático que represente la situación), esto implica efectuar los cálculos apropiados para encontrar la solución cuantitativa.

$$\begin{gathered}
x_2 = 253 - x_1 \\
8.500x_1 + 6.500(253 - x_1) = 1.890.500 \\
8.500x_1 + 1.644.500 - 6.500x_1 = 1.890.500 \\
2.000x_1 = 246.000 \\
x_1 = 123 \\
x_2 = 253 - 123 = 130
\end{gathered}$$

Paso 7: Validación de la solución: Ahora que ya tiene los valores cuantitativos, verifique que satisfagan las restricciones que diseñó y las condiciones técnicas que impuso.

Total de personas que asistieron a la exhibición $123 + 130 = 253$
Total de dinero recaudado por venta de boletas $8500 \times 123 + 6.500 \times 130 = 1.890.500$
$x_1 = 123$ y $x_2 = 130$ son valores positivos y enteros.

Paso 8: Solución al modelo: Con sus palabras exprese la solución del modelo, es decir, contextualice los resultados que obtuvo.

A la exhibición de autos clásicos y antiguos acudieron 123 adultos y 130 adultos mayores.

3.3.2. Segundo ejemplo. Conceptual. Este enunciado nos da la oportunidad de trabajar en un ejemplo que parte de una definición de un objeto matemático y luego pide la verificación numérica (tenga en cuenta que la verificación numérica es distinta a la demostración).

Sean $A, A_1, A_2, \cdots, A_r$ matrices todas del mismo tamaño. Se dice que A es combinación lineal de $A_1, A_2, \cdots, A_r$ si existen escalares $c_1, c_2, \cdots, c_r$ tales que $A = c_1A_1 + c_2A_2A_r + \cdots + c_rA$.

a. Determine si la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Determine si la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Para resolver el inciso a) hay que reinterpretar la pregunta y aplicar la definición que aparece en el enunciado, esto es, lo que hay que encontrar son los escalares (si es posible) c_1 y c_2 de forma que

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando las operaciones entre matrices se puede escribir

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$$

Cuando se comparan las matrices de la igualdad se obtiene el sistema con dos incógnitas

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ 2 = 0 \\ 0 = 0 \\ c_1 = -3 \end{cases}$$

Este sistema es inconsistente, o lo que es lo mismo, no tiene solución. Se produce una contradicción al comparar las entradas de las matrices, $2=0$.

La respuesta es entonces que la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ no es combinación lineal de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ porque el sistema de ecuaciones resultante es inconsistente.

Para el inciso b) se procede de manera similar, escribiendo

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hay que calcular los escalares de la combinación lineal mediante la aplicación de las operaciones entre matrices.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 & c_2 - c_3 + 3c_4 \\ c_1 + c_3 + 2c_4 & c_4 \end{pmatrix}$$

Al comparar las matrices se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 = 3 \\ c_2 - c_3 + 3c_4 = 2 \\ c_1 + c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_4 = -3 \end{cases}$$

Es un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas. No hay de qué preocuparse por la solución, aunque es más dispendioso podemos usar la sustitución para resolver el sistema en vez de otros métodos que son objeto de estudio del álgebra lineal, pero no en esta etapa.

Como $c_4 = -3$ el sistema se transforma en

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 6 \\ c_2 - c_3 = 11 \\ c_1 + c_3 = 6 \end{cases}$$

Ahora, considerando que $c_1 = 6 - c_3$, el sistema queda escrito como

$$\begin{cases} c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 - c_3 = 11 \end{cases}$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver ahora con el método de reducción porque es el más eficiente ya que c_3 está lista para ser reducida.

$$2c_2 = 11 \text{ y por tanto, } c_2 = \tfrac{11}{2}$$

Al hacer una sustitución hacia atrás, $c_3 = \frac{-11}{2}$ y $c_1 = \frac{23}{2}$. Con esto se obtiene que la matriz que nos dieron sí es una combinación lineal de las otras y la combinación es

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \frac{23}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{11}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{11}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3.3. Tercer ejemplo. Teórico. Este ejercicio hace énfasis en que el producto de matrices no es conmutativo, pero en este caso especial pide una condición para que este producto lo sea.

Encuentre α de tal manera que el producto de $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & \alpha \end{pmatrix}$ conmute.

Solución:

En las matrices, el orden de los factores sí altera el resultado. La pregunta sobre la conmutatividad del producto es muy relevante y requiere averiguar el valor de α para que

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha - 3 \\ 0 & \alpha + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4\alpha - 12 & \alpha + 4 \end{pmatrix}$$

Cuando se comparan las matrices aparece el sistema

$$\begin{cases} -\alpha - 3 = 0 \\ -4\alpha - 12 = 0 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones se resuelven cuando $\alpha = -3$ y este es el valor que hace que el producto conmute.

3.4 Ejercicios guiados

Los siguientes ejercicios no están completamente resueltos, pero se le ofrece una guía para que usted construya la solución.

3.4.1. Considere la función polinomial $f(x)=x^2-5x$ y la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule $f(A)$.

Para iniciar la solución es importante darse cuenta de que la función polinomial es una función cuyo dominio y rango son iguales al conjunto de matrices de tamaño 2×2 cuyas entradas son números reales, este conjunto se nota $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. El diagrama correspondiente es

$$\begin{array}{llcl} f: & M_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \rightarrow & M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & x & \mapsto & f(x)=x^2-5x \end{array}$$

Escriba la expresión que debe calcular para encontrar $f(A)$:

....
....
....

Haga las operaciones de cada uno de los sumandos:

....
....
....

Finalmente, haga la suma y escriba la solución:

....
....
....

3.4.2 La matriz $A=\begin{pmatrix}\cos\beta & \operatorname{sen}\beta\\ -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ se llama matriz de rotación en el plano. Esta matriz se estudiará con mayor detalle en la sección 15. Con base en esta matriz, conteste las siguientes preguntas o efectúe lo que se pide:

Encuentre una expresión simplificada para A^2.

....

....

....

Encuentre simplificaciones para A^3, A^4, A^5. Si es necesario utilice software para encontrarlas.

....

....

....

¿Observa algún patrón?

....

....

....

Determine una forma simplificada para A^k, en la que k es un entero positivo.

....

....

....

¿Los cálculos que hizo para A^2 y A^3, A^4, A^5 se ajustan a la forma que encontró para A^k?

....

....

3.4.3. Encuentre una constante k tal que $(kA)^T(kA)=1$, donde A es la matriz $\begin{pmatrix}3\\6\\-1\end{pmatrix}$.

En este ejercicio teórico usted debe resolver una ecuación cuya incógnita es la constante k teniendo en cuenta las operaciones entre matrices y sus propiedades. Para calcular k:

Calcule kA y $(kA)^T$:

....

....

Ahora, multiplique kA con $(kA)^T$ para obtener una expresión en términos de k

....

....

....

Luego, utilice el resultado anterior para escribir una ecuación cuyo lado derecho de la igualdad es 1.

....

....

....

Resuelva la ecuación. ¿Encontró más de un valor para k que se pueda utilizar?

....

....

....

3.4.4. Las edades de Juan y María suman 36 años, y al cabo de 8 años la edad de María excederá en 6 años la edad de Juan. Calcule la edad actual de ambos.

Este es un ejercicio típico en el que usted debe plantear un sistema básico de ecuaciones y utilizar técnicas de solución vistas en cursos anteriores. Para resolverlo siga los pasos dados a continuación.

Paso 1: Discusión del problema: Explique con palabras qué significan las palabras excederá y edad actual en el contexto del problema.

....

....

....

Paso 2: Definición de las incógnitas presentes en el problema. De acuerdo con lo que le piden, haga la descripción completa de las incógnitas y las unidades en que se miden.

....

....

....

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema. Escriba de manera simbólica las condiciones sobre cuánto suman las edades y sobre cómo estarán al cabo de 8 años.

....

....

....

Paso 4: Condiciones técnicas: Imponga condiciones a las incógnitas considerando que son edades.

....

....

....

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema. Argumente la escogencia de este método.

....

....

....

Paso 6: Resuelva el sistema, esto implica hacer los cálculos apropiados para encontrar la solución cuantitativa.

....

....

....

Paso 7: Validación de la solución: Ahora que ya tiene los valores cuantitativos, verifique que usted hizo bien los cálculos y que estos satisfacen las condiciones técnicas que impuso.

....

....

....

Paso 8: Solución al modelo: Recuerde que la instrucción del ejercicio era: Calcule la edad actual de ambos. Redacte la respuesta de modo acorde con esta instrucción.

....

....

....

3.5. Ejercicios propuestos

Después de estudiar los conceptos básicos de las matrices, sus operaciones y propiedades, estudiar los problemas resueltos y los guiados, usted se encuentra en un punto importante en el estudio individual que le permite iniciar la solución de ejercicios, solución de problemas y planteamiento de modelos. A continuación, usted encontrará ejercicios propuestos para que los aborde con las herramientas que ya ha adquirido con el estudio previo. Al final del libro usted hallará las respuestas; no obstante, consúltelas hasta que usted haya tratado de resolverlos completamente.

3.5.1. Encuentre los valores para x y y que hagan que las expresiones sean verdaderas.

a. $3\begin{pmatrix} x & -y \\ 2x+9 & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 45 & -9 \end{pmatrix}$.

b. $-2\begin{pmatrix} -x & y \\ y & 5x \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} y & 2x \\ -x & 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 22 \\ 4 & -80 \end{pmatrix}$.

3.5.2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=(3 \quad -27 \quad 1)$ y $C=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, determine cuáles de los siguientes productos están definidos y calcule aquellos que sean posibles.

a. ABC
b. ACB
c. BAC
d. CBA

3.5.3. Samuel, Carolina y Jesús atienden tres puestos de venta al lado de la carretera que conduce de Melgar a Girardot. Un fin de semana, todos venden jugos de patilla, naranja y mandarina. Las dos primeras tablas representan la cantidad de jugos de cada uno de los productos vendidos por cada una de las personas, en el sábado y el domingo; la tercera tabla proporciona los precios, en pesos, de cada tipo de jugo que venden.

	Sábado		
	Patilla	Naranja	Mandarina
Samuel	30	38	45
Carolina	20	42	50
Jesús	15	35	40

	Domingo		
	Patilla	Naranja	Mandarina
Samuel	45	50	55
Carolina	30	60	60
Jesús	40	25	40

	Precio por jugo
Patilla	2.000
Naranja	3.000
Mandarina	2.500

Defina las matrices A, B y C con las entradas de acuerdo con las tablas anteriores. Esto es, A, B representan la cantidad de jugos vendida en sábado y domingo, respectivamente y C los precios de los jugos por cada tipo de jugo que venden. Con las matrices así definidas, efectúe las siguientes operaciones e interprete los elementos en cada resultado.

a. AC

b. BC

c. En alguno de los casos anteriores, ¿pudo obtener ventas superiores a un millón de pesos?

d. $A+B$

e. $(A+B)\,C$

f. ¿Cuál fue el total en ventas para este fin de semana?

3.5.4 Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, calcule:

a. $A^2, A^3, A^4\ldots$ hasta que detecte un patrón de comportamiento.

b. Dado que ya reconoce un patrón, complete las entradas vacías en las matrices 2X2; $\begin{pmatrix}\square & 8\\ \square & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}34 & \square\\ 21 & \square\end{pmatrix}$.

3.5.5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 0 & 1/2 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 4 & -1 & 6\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$, efectúe las operaciones algebraicas que se piden o explique la razón de no poder ejecutarlas.

a. $2B-5C^T$

b. $2B+5C$

c. BC

d. $(CB)D$

e. $(AB)D^T$

3.5.6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, y las funciones $f(x) = x^2 - 5x$ y $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 8$. Halle $f(A)$ y $g(A)$.

3.5.7. Considere dos compañías de comida rápida, MD y BK. Cada año, la compañía MD conserva 1/4 de sus clientes, mientras que 3/4 de sus consumidores cambian a BK. Cada año, BK conserva $1/2$ de sus clientes, mientras que $1/2$ cambia a MD. Suponga que la distribución inicial del mercado está dada por $X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

a. Determine la distribución del mercado después de un año.
b. Determine la distribución estable del mercado.

3.5.8. Considere una matriz B_2, $B \neq 0_2$ y $B \neq I_2$, tal que $AB = BA$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. ¿Cuántas matrices B de este tipo hay?
b. Determine una forma general para la matriz B.

3.5.9. Determine una constante k tal que $(kA)^T (kA) = 1$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$. ¿Hay más de un valor de k que se pueda utilizar?

3.5.10. Pedro tiene en su alcancía de ahorros 400 monedas entre las de 500 pesos y las de 1.000 pesos. Si al romper la alcancía encuentra que tiene un total de ahorros de 290.000 pesos, ¿cuántas monedas de cada denominación tenía?

3.6. Preguntas de tipo Saber Pro

Antes de abordar estas preguntas usted debe tener claro el desarrollo presentado en su clase teórica, lo cual implica conocer las propiedades de las matrices y de sus operaciones.

Las Preguntas de tipo Saber Pro son preguntas cerradas, es decir, constan de un enunciado y cuatro reactivos de los que se debe seleccionar uno solo, si la pregunta es de selección múltiple con única respuesta o dos, si es de múltiple respuesta. Las preguntas que presentamos a continuación están formuladas con la técnica que aparece en Barragán et al. (Barragán, Bogoya, Contento, & Ocaña, 2014, págs. 21-28).

Como este libro pretende influir en su formación y en su información, le sugerimos que la táctica para contestarlas gravite en torno a ofrecer una justificación contundente acorde al enunciado. Justificación contundente significa que si la pregunta es de única respuesta debe incluirse el proceso o argumento (proposiciones, teoremas o propiedades) que descarte las tres incorrectas o se justifique con detalle el proceso o argumento que lleva a la elección de la opción correcta. Al contestar estas preguntas cerradas evite hacer una operación por cada reactivo, pues esto implicaría que una pregunta se convierte en cuatro preguntas diferentes; lo recomendable es que, en la mayoría de los casos, intente hacer una justificación global.

Al finalizar las preguntas usted encontrará las claves (este es el nombre para la respuesta correcta) y la justificación global. En otras preguntas solo le damos la clave y usted puede escribir la justificación.

Preferiblemente, trate de contestar las preguntas por sí solo y luego consultar las respuestas. Asegúrese de marcar solo una respuesta por cada pregunta. En los exámenes que emplean estos tipos de pregunta (exámenes de suficiencia en inglés o las pruebas Saber Pro) invalidan las respuestas que tienen multimarca.

3.6.1. Preguntas de selección múltiple con única respuesta

1) Para la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ es correcto afirmar que la traza de A, $Tr(A)$, es
   A. $Tr(A)=0$
   B. $Tr(A)=-3$
   C. $Tr(A)=2$
   D. $Tr(A)=-2$

2) Si se tiene una matriz A tal que A_{2X3} se cumple que:
   A. $Tr(A)$ está definida.
   B. Se puede encontrar A^2.
   C. AA^T puede ser calculada.
   D. A puede escribirse como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

3) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 2. ¿Puede ocurrir que su producto sea la matriz nula de orden 2?

A. Sí, y se debe tener que una de las matrices debe ser necesariamente nula.
B. Sí, y no es necesario que alguna de las matrices sea nula.
C. Sí, y una de las matrices debe tener una fila de ceros y la otra una columna de ceros.
D. Sí, y solo ocurre si las dos matrices son necesariamente nulas.

4) Si $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$ entonces

A. $A^TB^T=\begin{pmatrix}-7\\ 8\end{pmatrix}$

B. $AB=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

C. $(AB)^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

D. $AB^T=\begin{pmatrix}5\\ 9\end{pmatrix}$

5) Si $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ se tiene que:

A. $A^2=A$

B. $A^T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

C. $A^TA=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

D. $AI_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$

6) En el mes de julio de 2018, un comerciante compró 600 libras de café y 800 libras de cacao pagando 1320 dólares en total. Un mes después, y habiendo aumentado el precio por libra de café en 10% y disminuido el precio del cacao en 10%, pagó por 800 libras de café y 600 de cacao un total de 1556 dólares. El precio inicial de una libra de café en dólares era:
A. 0,54
B. 0,60
C. 1,40
D. 1,54

3.6.2. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

7) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}$, se tiene que:

1. $AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$
2. $BA=\begin{pmatrix}8 & 4\end{pmatrix}$
3. $(AB)^T=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$
4. $A^TB^T=\begin{pmatrix}8\\ 4\end{pmatrix}$

8) Si $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ se cumple que:

1. A^T es triangular inferior
2. $Tr(A)=-1$
3. La componente simétrica de A es $\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ -\frac{1}{2} & -1 & -1\end{pmatrix}$

4. La componente antisimétrica de A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

9) Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $f(x)=2x^2-3x-1$, entonces

1. (A) es una matriz cuadrada de orden 2.
2. $f(A)=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$
3. $(f(A))^T$ no está definida.
4. $f(A)$ es un polinomio cuadrático.

10) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & -11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Respecto a la matriz C se puede afirmar que es combinación lineal de A y B si:

1. $c_1=-1$
2. $c_2=1$
3. $c_2=-3$
4. $c_1=3$

11) Sea $C=\begin{pmatrix} k-3 & 2 \\ 1 & k^2-3k+1 \end{pmatrix}$, si $Tr(C)=13$ entonces

1. $k=-5$
2. $k=5$
3. $k=3$
4. $k=-3$

12) Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Para A y B, NO es correcto afirmar que:

1. $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$.
2. $BA=\begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.
3. $AB^2 \neq (AB)B$.
4. $(A+B)^t=A^t+B^t$.

13) Sea $A=\begin{pmatrix} k & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1-k \end{pmatrix}$, los valores de k que hacen que $A^2=A$ son:

1. $k=1/3$
2. $k=-1$
3. $k=2/3$
4. $k=-1/3$

14) En una empresa por 3 horas de trabajo especializado y 4 horas de trabajo no especializado se pagan \$80.000, en tanto que por 7 horas de trabajo especializado y 2 horas de trabajo no especializado se pagan \$150.000. Es correcto afirmar que

1. El costo de una hora de trabajo especializado es el triple del costo de una hora de trabajo no especializado.
2. El costo de 6 horas de trabajo especializado y 4 horas de trabajo no especializado será de \$28000.
3. La razón del costo de la hora de trabajo especializado al costo de la hora del no especializado es 4.
4. Se tiene que $\begin{cases} 3E+4N=80.000 \\ 2N+7E=150.000 \end{cases}$ siendo E y N el costo de una hora de trabajo especializado y no especializado, respectivamente.

3.7. Recursos informáticos recomendados

3.7.1 Recursos de cálculo online

1. Symbolab: Es un recurso en línea que dispone de unas ayudas gratis y otras con pago. Útil para operaciones básicas entre matrices y de una fácil interacción con el usuario. Disponible en https://es.symbolab.com/solver
2. Wolfram Alpha: Potente recurso en línea que dispone de un variado menú de herramientas de cálculo simbólico. En particular permite trabajar lo correspondiente a operaciones básicas de matrices y algunos elementos de estas. En la ruta https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/algebra/matrices/ , usted podrá explorar y calcular operaciones entre matrices (Matriz Aritmética), la traza o rastro de una matriz (Rastro), y en https://www.wolframalpha.com/input/?i=transpose+%7B%7B-3,+2%7D,+%7B5,+1%7D%7D&lk=3 se puede evaluar la transpuesta de una matriz.

   Es muy fácil de navegar por los diferentes menús, pero usted deberá ser muy cuidadoso con la forma en que debe emplear la entrada de la información, pues el programa es muy riguroso en la simbología matemática.

   Algunos procesos pueden ser visualizados paso a paso, otros requieren el pago de una franquicia de acceso.
3. OnlineMSchool ofrece a través de su página http://es.onlinemschool.com/math/assistance/matrix/ una serie de ayudas para operaciones de suma, resta, multiplicación de dos matrices y la transposición de una matriz. Es muy fácil de usar y como apoyo al final presenta un menú Intente resolver ejercicios con matrices donde usted puede practicar con algunos ejercicios propuestos y verificar sus respuestas.
4. La calculadora online https://matrix.reshish.com/es/multiplication.php le permite hacer sumas, restas y multiplicaciones de matrices.

3.7.2. Algunos videos de apoyo

A continuación presentamos los enlaces de tres videos de apoyo. Estos se sugieren para que usted pueda ver algunos ejemplos básicos de los conceptos abordados. Recuerde lo que expresa el profesor Julio Alberto Ríos Gallego “Julioprofe”:

"El estudiante debe convencerse de que la matemática entra por la mano y no tanto por los ojos. Aunque hay que comprender la teoría (leyendo libros, mirando los vídeos, presentaciones y animaciones que hoy la tecnología pone a nuestra disposición), lo verdaderamente efectivo para asimilar los contenidos es sentarse a escribir, a hacer los ejercicios y problemas de aplicación, para ir ganando seguridad y aumentar poco a poco el repertorio de estrategias" (Entrevista a Julio Ríos, @julioprofe en Youtube, 2010).

1. Metodología de la modelación matemática https://youtu.be/O4yd-lSHkVw (6:00)
2. Mezcla de mezclas https://youtu.be/KOmGN19tkzM (5:11)
3. Operaciones básicas con matrices https://youtu.be/ROIZQ2Pc2Fc (6:32)
4. Imagen de un polinomio en una matriz https://youtu.be/m0gn0s6sj-4 (3:50)
5. Operaciones con matrices https://www.youtube.com/watch?v=ROIZQ2Pc2Fc&t=3s (6:32)
6. Operaciones entre matrices https://youtu.be/AdPJ7q1V2dY (4:14)
7. Producto de matrices (Aplicación) https://youtu.be/yebdyfLBppg (8:49)
8. Matrices (Multiplicación por un escalar) https://youtu.be/jMGD7c8-1EA (6:19)

4 DETERMINANTES Y PROPIEDADES

4.1 Introducción

En esta sección estudiaremos aspectos relacionados con una función muy importante en álgebra lineal. La función determinante es una función de variable matricial a valor real, esto quiere decir que el dominio de la función es el conjunto de las matrices cuadradas de orden n y su codominio son los números reales $\mathbb{R}$. En términos simbólicos el determinante es

$$\begin{array}{llcl} \textit{det:} & M_{n\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \det A = |A| \end{array}$$

Esta función solo la calculamos para matrices cuadradas. El determinante no está definido para matrices rectangulares ($n\times m, n\neq m$).

Como el estudio de los determinantes es bastante amplio, en esta sección nos enfocaremos en las definiciones y propiedades que nos ayuden a construir los conocimientos que requerimos para resolver los sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Trabajaremos en la modelación, aunque nos queden pendientes algunos cálculos porque todavía falta estudiar los métodos de solución. No obstante, la modelación nos sirve de motivación para su estudio.

Para esta sección se requiere que usted se haya ejercitado en la implementación de las definiciones para matrices cuadradas de orden 2 y 3.

4.2. Objetivos de información

- Practicar las definiciones de los determinantes para matrices cuadradas de orden 2, 3 y n.
- Implementar las propiedades de los determinantes siempre que permitan encontrar determinantes de manera eficiente.
- Explorar situaciones problema que tengan su base en sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

4.3. Ejemplos resueltos

4.3.1. Primer ejemplo. Algorítmico. Encuentre los siguientes determinantes:

a. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Solución:

Para calcular los determinantes intentaremos aplicar las propiedades como primera herramienta; si no encontramos (por inspección) ninguna propiedad que pueda ayudar a hallar el resultado de manera eficiente, es decir, a obtener el resultado sin hacer muchas operaciones, entonces optaremos por la definición generalizada de determinante.

En el inciso a) vemos que la matriz tiene dos filas idénticas, $F_1 = F_4$, así

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

En la matriz del inciso b) por inspección no reconocemos ninguna propiedad, lo que notamos es que la fila 3, F_3, tiene tres entradas iguales a cero, es decir, $a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0$. Tal vez lo mejor será calcular el determinante con la definición generalizada usando la tercera fila. Este cálculo queda representado así:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{4} a_{3j} A_{3j}$$

La sumatoria tiene como límite superior a 4 porque este es el orden de la matriz; como se mencionó, se calculará por la tercera fila y esto se materializa en que se fija $i = 3$ y el contador de la sumatoria está sobre la columna j.

$$\sum_{j=1}^{4} a_{3j} A_{3j} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}$$

En este punto es importante recordar algunas cosas: 1) a_{ij} representan las entradas de la matriz y A_{ij} son los cofactores; 2) para una matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, el cofactor A_{ij} es un número que se calcula como $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ donde M_{ij} es el menor correspondiente ; y 3) para esta matriz $a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0$;
Con esto en mente,

$$\sum_{j=1}^{4} a_{3j} A_{3j} = 0 \times A_{31} + 0 \times A_{32} + 0 \times A_{33} + 0 \times A_{34}$$

Se reduce entonces nuestro cálculo a encontrar el cofactor A_{33} que es:

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^6 \left(1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = 13$$

Así,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{4} a_{3j}A_{3j} = A_{33} = 13$$

Aunque la matriz del inciso c) es una matriz cuadrada de orden 3 y su determinante es muy sencillo de calcular (por la Ley de Sarrus o por la definición), notamos que es una matriz triangular superior y por esto su determinante es igual a la multiplicación de los elementos de la diagonal principal, por lo que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times 9 \times (-3) = -54.$$

4.3.2. Segundo ejemplo. Teórico. Verifique que $|A+B| \neq |A|+|B|$.

Solución:

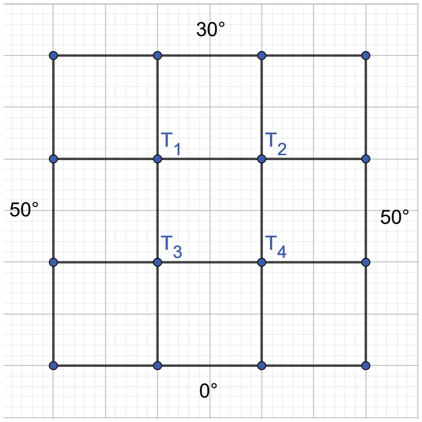
Este ejercicio es muy importante porque nos hace pensar en que el "sentido común" dista de la lógica que está inmersa en la matemática. A simple vista podría pensarse que el determinante de una suma es la suma de los determinantes, pero esto no es cierto. El ejercicio nos pide hacer una verificación (no una demostración) implicando que debemos escoger un par de matrices (suficientemente generales, evitando casos como $A=B$, $A=0$ o $B=0$), con ellas hacemos los cálculos para convencernos de que el resultado del lado izquierdo no es igual al del lado derecho.

Para este ejercicio tomaremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Para el lado izquierdo de la expresión, $A+B = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ y $|A+B| = -87$. Ahora para el lado derecho, $|A| = -45; |B| = 6$ y $|A|+|B| = -39$.

Con esto verificamos que $|A+B| \neq |A|+|B|$ pues $|A+B| = -87$ y $|A|+|B| = -39$.

4.3.3 Tercer ejemplo. Modelación. Una plancha cuadrada tiene flujo de calor a través de sí misma porque está aislada por arriba y por abajo. Cada borde tiene una temperatura constante, pero es diferente en cada borde. Las temperaturas en los puntos interiores de la placa pueden ser estimadas, mediante la regla que promedia las temperaturas de los cuatro puntos circunvecinos, al oeste, al norte, al este y al sur. De acuerdo con la placa de la Figura 3, estime T_i con $i = 1,2,3$ y 4 las temperaturas en los cuatro puntos interiores igualmente espaciados en la placa. Problema adaptado de Kolman (Kolman & Hill, 2013, pág. 70).

Figura 3. Placa cuadrada con puntos internos de calor.



Fuente: Elaboración propia con base en (Kolman & Hill, 2013, pág. 70) con Geogebra Classic 5.0®

Solución:

Paso 1: Discusión del problema: Al leer el problema, sabemos las temperaturas en los bordes de la placa, pero no en los puntos interiores. Para encontrar estas temperaturas no haremos nada experimental como poner un termómetro en cada punto. Lo que haremos será usar la regla de cálculo que nos dice: promediar la temperatura de los puntos circunvecinos.

Paso 2: Definición de las incógnitas presentes en el modelo. El problema ya nos indica que debemos usar T_i con $i = 1,2,3$ y 4, una incógnita por cada punto de calor. La unidad de medida de la temperatura serán los grados centígrados porque los bordes de la placa tienen esta unidad, $T_i :=$ Temperatura en el punto de calor i medida en grados centígrados con $i = 1,2,3$ y 4.

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema. Realmente hay una sola limitación y es la regla de promediar la temperatura de los puntos circunvecinos para averiguar las que nos preguntan. Como hay cuatro puntos interiores, serán cuatro ecuaciones. Al volver a la Figura 3 escribimos las ecuaciones, quedan diseñadas como:

Promedio de la temperatura de los puntos circunvecinos para $T_1 = \dfrac{30+50+T_2+T_3}{4}$

Promedio de la temperatura de los puntos circunvecinos para $T_2 = \dfrac{30+50+T_1+T_4}{4}$

Promedio de la temperatura de los puntos circunvecinos para $T_3 = \dfrac{T_1+50+T_4+0}{4}$

Promedio de la temperatura de los puntos circunvecinos para $T_4 = \dfrac{T_2+50+T_3+0}{4}$

Paso 4: Condiciones técnicas: las incógnitas son temperaturas y, por tanto, pueden ser números negativos o 0 cero si es frío, positivos si es calor. En este modelo, los fraccionarios también tienen interpretación; piense en la temperatura corporal marcada por un termómetro como 37,8. De este modo,

T_i son irrestrictas o libres para $i = 1,2,3$ y 4.

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema (o el objeto matemático que represente la situación). Argumente la escogencia de este método. En este punto del estudio no podemos resolver el sistema porque aún no hemos estudiado los métodos de solución, hasta ahora estamos en sus prerrequisitos. No obstante, esta situación problema nos revela la importancia de estos métodos.
El sistema de 4 ecuaciones lineales con cuatro incógnitas que modela la situación de la placa caliente es:

$$\begin{cases} 4T_1 - T_2 - T_3 = 80 \\ -T_1 + 4T_2 - T_4 = 80 \\ -T_1 + 4T_3 - T_4 = 50 \\ -T_2 - T_3 + 4T_4 = 50 \end{cases}$$

4.4 Ejercicios guiados

4.4.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, halle el valor del determinante de A, siguiendo las indicaciones. Este ejercicio le ayuda a tener una visión global y comparativa de la definición generalizada de determinante y de la ley de Sarrus para la matriz de orden 3.

Haga el cálculo del determinante utilizando como base la segunda columna y el método de cofactores.

Realice el cálculo del determinante utilizando como base la tercera fila y el método de cofactores.

Haga el cálculo del determinante utilizando el método de Sarrus.

Compare los resultados; si se cambia la fila o la columna, ¿puede variar este resultado?

¿Qué método le pareció más eficiente? ¿Por qué?

4.4.2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, ¿para qué valores de x, $|A-xI_2|=0$?Este ejercicio permite recordar y practicar las operaciones entre matrices de la sección anterior, además de enlazar dichas operaciones con el tema de esta sección. También utiliza conceptos del precálculo ya que requiere solución de ecuaciones cuadráticas. Para resolverlo, calcule la operación entre matrices $A-xI_2$.

....

....

....

Luego, teniendo en cuenta el resultado anterior, halle $|A-xI_2|$.

....

....

....

Ahora iguale el resultado anterior a 0, y resuelva la ecuación que escribió.

....

....

....

Compruebe dichas soluciones remplazando los valores de x, en $|A-xI_2|$.

....

....

....

4.4.3 Halle $\begin{vmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 10 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 5 & -1 & 6\end{vmatrix}$.

Con este ejercicio se pretende analizar la eficiencia en el cálculo (implementación de algoritmos) para así evitar desarrollos extensos e innecesarios. Para esto:
¿la matriz del determinante corresponde a una matriz triangular superior o inferior? Si su respuesta es afirmativa, ¿qué ocurre con el determinante?

....

....

Identifique la fila o columna que tenga mayor cantidad de ceros; ¿por qué es importante esta identificación?

....

....

....

Con base en el paso anterior aplique cofactores para determinar el valor del determinante.

....

....

....

¿La ley de Sarrus le hubiese permitido hallar el valor del determinante inicial?

....

....

....

4.5. Ejercicios propuestos

4.5.1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -x & x \\ 1 & 4x & 1 \end{pmatrix}$, halle los valores de x tales que $|A| = 0$.

Suponga que $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 5$, halle los valores de los siguientes determinantes, utilizando las propiedades de los determinantes.

a. $\left| 4 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right|$

b. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} x_1 & 6x_2 & -x_3 \\ y_1 & 6y_2 & -y_3 \\ z_1 & 6z_2 & -z_3 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} x_1 & -x_2+x_1 & 2x_3 \\ y_1 & -y_2+y_1 & 2y_3 \\ z_1 & -z_2+z_1 & 2z_3 \end{vmatrix}$

Halle el valor de los siguientes determinantes:

a. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 4 & 9 & -6 & 11 \\ 0 & -3 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

4.5.4. Mediante las operaciones entre matrices, determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Para ello utilice las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$. También se sugiere usar software o una calculadora online.

a) $|AB|=|A||B|$

b) $|A+B|=|A|+|B|$

c) $|4A|=4^3|A|$

4.6. Preguntas de tipo Saber Pro

Revise el desarrollo teórico presentado en su clase magistral 2 antes de abordar estas preguntas. Tenga claridad en el cálculo y las propiedades de los determinantes.

4.6.1. Preguntas de selección múltiple de respuesta única

1) Para la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 4 & 0 & -1\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}$ es correcto afirmar que:

   A. $|A|=69$
   B. $|A|=-3$
   C. $|A|=65$
   D. $|A|=-7$

2) Si se tiene una matriz A tal que A_3, y $|A|=2$ se cumple que:

   A. $|2A|=4$
   B. $|A^T|=-2$
   C. $|-2A|=-16$
   D. $|3A|=18$

3) Sea A una matriz cuadrada de orden 2. ¿Puede ocurrir que $|A|=0$?

   A. Sí, y la matriz debe ser necesariamente nula.
   B. Sí, y no es necesario que la matriz sea nula.
   C. No, pues el determinante es un número positivo.
   D. Sí, y solo ocurre si la matriz tiene una columna o fila de ceros.

4) Si $A=\begin{pmatrix}-1 & 2-x\\ 3 & -3\end{pmatrix}$ y se sabe que $|2A|=8$, entonces x es:

   A. $x=-\frac{7}{3}$
   B. $x=-\frac{5}{3}$
   C. $x=\frac{5}{3}$
   D. $x=\frac{7}{3}$

5) Si $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ se tiene que:

   A. $|A+B|=\frac{3}{2}$
   B. $|A-B|=\frac{3}{2}$
   C. $|B^T|=-\frac{2}{3}$
   D. $|AB|=0$

4.6.2. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

6) Sea las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\1 & -2\end{pmatrix}$ se tiene que:

1. $|(AB)^T|=16$
2. $|A|+|B|=0$
3. $|A|-|B|=0$
4. $|3A|=-12$

7) Si $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ se cumple que:

1. $M_{21}=-1$
2. $|A^T|=-1$
3. $|A^2|=-1$
4. $|A^3|=-1$

8) Sea $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$ se cumple que:

1. $|A+xI_2|=x^2-3x+2$
2. $|A-xI_2|=x^2-3x+2$
3. $|A^2|=6$
4. $A^2-3A+2I_2=0_2$

9) Dada $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\4 & -1 & 2\\1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ entonces:

1. $|A^T|=\frac{1}{7}$
2. $|3A|=189$
3. $|2A^3|=2744$
4. $|A^4|=-2041$

10) Sea $C=\begin{pmatrix}k-3 & 2\\1 & k^2-k-2\end{pmatrix}$, si $|C|=-2$ entonces

1. $k=-3$
2. $k=1$
3. $k=2$
4. $k=3$

11) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-k-1 & 2\\1 & -k\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}k+1 & -2\\-1 & -k\end{pmatrix}$ los posibles valores de k que hacen que $|A|-|B|=0$ son

1. $k=-2$
2. $k=-1$
3. $k=0$
4. $k=1$

12) Sea $A=\begin{pmatrix}k & \frac{1}{3}\\\frac{2}{3} & 3-k\end{pmatrix}$, los valores de k que hacen que $|A|-\frac{16}{9}=|0_2|$ son:

1. $k=-2$
2. $k=-1$
3. $k=1$
4. $k=2$

4.7. Recursos informáticos recomendados

4.7.1. Recursos de cálculo online

1. Symbolab: Es un recurso en línea que dispone de unas ayudas gratis y otras con pago. Útil para el cálculo de determinantes y de una fácil interacción con el usuario. En la barra de entrada debe dar la sintaxis det o determinant y puede calcular determinantes de orden 4. (Muestra los pasos de cálculo usando el método del menor y los cofactores). Disponible en https://es.symbolab.com/solver
2. Wolfram Alpha: Permite trabajar con determinantes. En la ruta http://m.wolframalpha.com/examples/Matrices.html y el menú Determinante puede evaluar determinantes de orden 2 y 3 con la ventaja de que le va a suministrar una visualización geométrica del resultado interpretándola como un valor asociado al área y el volumen según el caso, del paralelogramo o el paralelepípedo determinado por los vectores que conforman cada una de las filas de la matriz.
3. OnlineMSchool ofrece a través de su página http://es.onlinemschool.com/math/assistance/matrix/determinant/ el cálculo de determinantes de matrices de orden 7. Debe tener cuidado con las reglas de la introducción de números para que el cálculo sea exitoso.
4. En https://www.vitutor.com/algebra/determinantes/d_e.html usted encontrará 20 ejercicios básicos de determinantes. Intente resolverlos antes de recurrir a la pestaña o página de soluciones.
5. Para estudiar problemas resueltos que involucran determinantes usted puede ir a https://es.scribd.com/doc/111198978/Aplicaciones-de-Determinantes-3x3-Sol
6. La calculadora online https://matrix.reshish.com/es/determinant.php le posibilita el cálculo de determinantes de matrices de pequeños y grandes tamaños.

4.7.2. Algunos videos de apoyo

La reproducción de un video con contenido académico debe ir acompañada de la reconstrucción a papel y lápiz de los procesos que allí se indican. Luego usted debería tratar de resolver un problema similar que encuentre sobre el tema abordado en otro video para resolverlo por sí solo. Luego coteje su resultado con lo que en él sea presentado.

1. Propiedades de los determinantes (Parte 1) https://www.youtube.com/watch?v=TOOE-VbnS-h0&t=1s (8:17)
2. Propiedades de los determinantes (Parte 2) https://www.youtube.com/watch?v=V_1PB-inf3Eo&t=1s (8:12)
3. Área de un triángulo (Aplicación de los determinantes) https://www.youtube.com/watch?v=k5nH21YCqiQ (5:43)
4. Determinantes https://youtu.be/LZ75EXovA0w (6:20)
5. Matriz singular https://www.youtube.com/watch?v=oA5qJy692fo&t=28s (4:07)

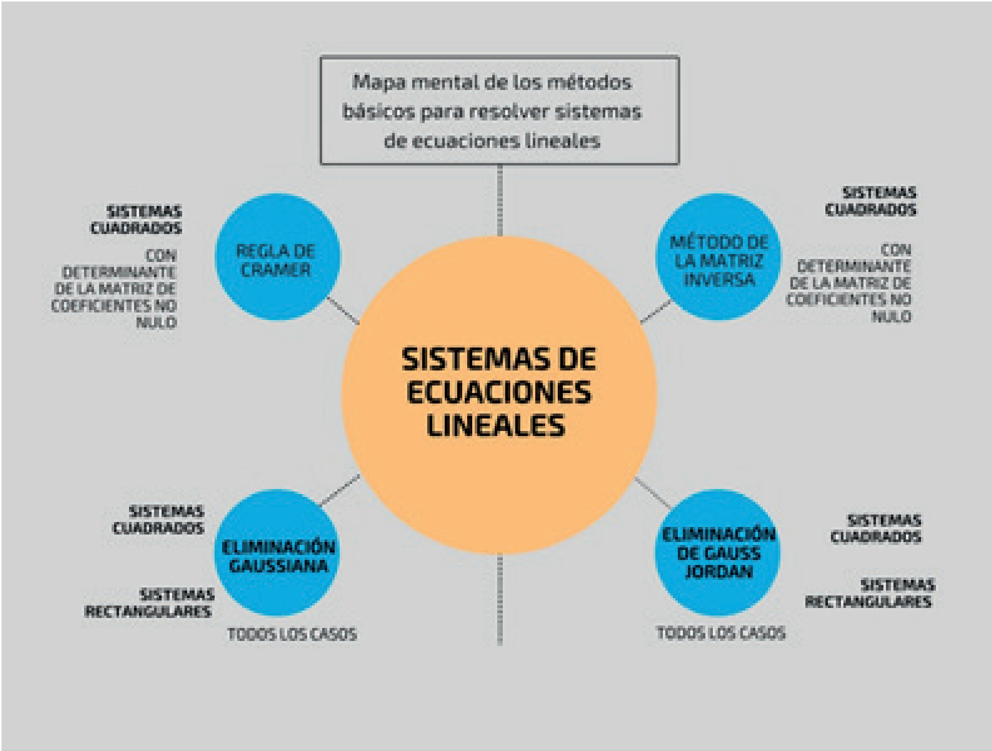
5 REGLA DE CRAMER Y MATRIZ INVERSA

5.1 Introducción

La Figura 4 presenta los métodos básicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales y los casos en los que se pueden aplicar. En esta sección estamos interesados en estudiar modelos y situaciones problema que recaen en dos métodos de solución de sistemas de n ecuaciones con n incógnitas: la regla de Cramer y el método de la matriz inversa. Estas dos técnicas sirven para resolver sistemas de ecuaciones lineales cuadrados con la condición de que el determinante de la matriz de coeficientes sea no nulo (diferente de cero).

Para abordar los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales, se inicia el estudio en casos un poco restringidos para abordar progresivamente tales métodos, en vista de que es necesario separar los casos y los modelos para avanzar sin abarcar todo al mismo tiempo.
En lo posible en esta sección los ejemplos, ejercicios y preguntas están ligados a situaciones problema y modelos, más que los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones por sí solos.

Figura 4. Mapa mental de los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales.



Fuente: Elaboración propia en Canva.com

5.2 Objetivos de información

- Practicar los algoritmos de solución de sistemas de n ecuaciones con n incógnitas correspondientes a la regla de Cramer y el método de la matriz inversa.
- Modelar situaciones problema que se representen mediante sistemas de ecuaciones lineales cuadrados.
- Completar la metodología de planteamiento de modelos y problemas hasta la solución.

5.3. Ejemplos resueltos

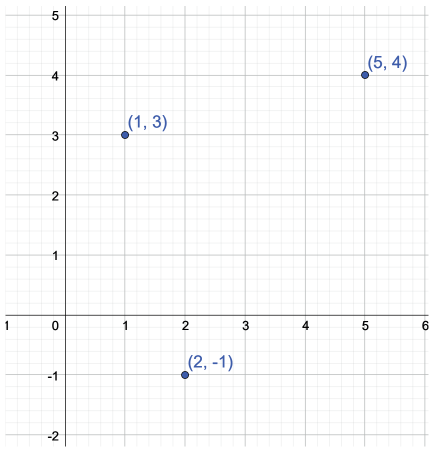
5.3.1. Primer ejemplo. Modelación. Encuentre el polinomio cuadrático que interpole los puntos (1,3),(2,−1) y (5,4).

Solución:

Paso 1: Discusión del problema: Después de leer atentamente el problema debemos reinterpretarlo: parafraseando, comentando y explicando con expresiones verbales propias.

Aunque el planteamiento de la situación es muy breve, es importante entender completamente lo que allí se pregunta. En la medida en que lo comprendamos a cabalidad podremos dar solución. Básicamente hay dos cosas para puntualizar: la primera es que solo hay un polinomio cuadrático y este es de la forma $p(x) = ax^2 + bx + c$; y la segunda es que la interpolación polinomial lo que hace es buscar un polinomio que pase por los tres puntos dados. Nuestro trabajo es encontrar un polinomio cuadrático cuya parábola contenga los puntos que aparecen graficados en la Figura 5.

Figura 5. Puntos para interpolación polinomial.



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Classic 5.0®

Paso 2: Definición de las incógnitas presentes en el modelo. Hay que incluir la descripción completa de las incógnitas y, si es el caso, las unidades en que se miden.

Como el polinomio que debemos encontrar tiene su forma estándar $p(x) = ax^2 + bx + c$, las incógnitas son los coeficientes presentes en p. De modo que:

$$a := \text{coeficiente de } x^2 \text{ en el polinomio cuadrático.}$$
$$b := \text{coeficiente de } x \text{ en el polinomio cuadrático.}$$
$$c := \text{coeficiente de 1 en el polinomio cuadrático.}$$

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema. Hay que tener en cuenta los constreñimientos que están afectando el problema. Es muy conveniente rotular las ecuaciones con frases que indiquen a qué hace referencia cada limitación. En caso de ser necesario, incluya las unidades de medida.

Como el polinomio de interpolación pasa por los tres puntos, cada punto representa una ecuación. Cuando usted sustituya x por la primera componente del punto, el valor que debe tomar $p(x)$ debe ser el de la segunda componente del mismo punto.

Punto (1,3)	$a + b + c = 3$
Punto (2,−1)	$4a + 2b + c = -1$
Punto (5,4)	$25a + 5b + c = 4$

Paso 4: Condiciones técnicas: Imponga condiciones a las incógnitas definidas para que sus valores cuantitativos tengan sentido dentro de la modelación.

Como a,b y c son los coeficientes del polinomio cuadrático, tienen interpretación en casi cualquier caso. Por ejemplo, si $a > 0$, entenderemos que la parábola es cóncava hacia arriba y si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo. $a = 0$ implicaría que el polinomio es lineal, pero este no es el caso porque tenemos tres puntos no colineales.

$$a \neq 0 \text{ y } b,c \text{ son irrestrictas o libres.}$$

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema (o el objeto matemático que represente la situación). Argumente la escogencia de este método.

Usaremos la regla de Cramer para resolver el ejercicio porque esto implica hacer menos operaciones manualmente.

Paso 6: Resuelva el sistema (o el objeto matemático que represente la situación), esto implica realizar los cálculos apropiados para encontrar la solución cuantitativa.

El sistema queda definido como $\begin{cases} a+b+c=3 \\ 4a+2b+c=-1 \\ 25a+5b+c=4 \end{cases}$ y su equivalente en términos matriciales es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Para verificar si es posible usar la regla de Cramer calculamos el determinante de la matriz de coeficientes observando que es diferente de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{vmatrix}=-12 \neq 0$$

De esta manera las incógnitas quedan calculadas individualmente como:

$$a=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{-17}{-12}=\frac{17}{12}; b=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 25 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{99}{-12}=-\frac{99}{12} \text{ y } c=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 25 & 5 & 4 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{-118}{-12}=\frac{59}{6}$$

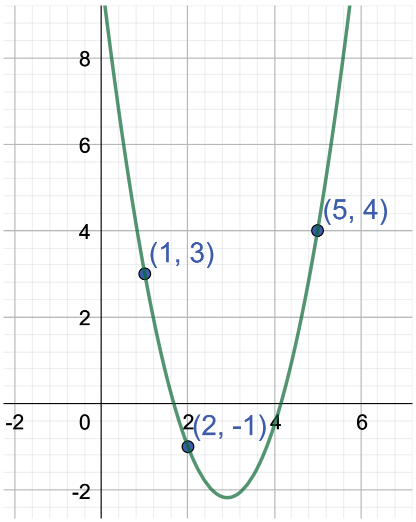
Hemos encontrado que el polinomio cuadrático que interpola los puntos es:

$$p(x)=\frac{17}{12}x^2-\frac{99}{12}x+\frac{59}{6}$$

Paso 7: Validación de la solución: Ahora que ya tiene los valores cuantitativos, verifique que satisfagan las restricciones que diseñó y las condiciones técnicas que impuso.

Una posibilidad de validación es remplazar los valores de a,b y c en las ecuaciones que se diseñaron. Otra posibilidad es graficar el polinomio y ver que efectivamente pasa por los puntos dados. La segunda opción está representada en la Figura 6.

Figura 6. Polinomio cuadrático de interpolación para (1,3),(2,-1) y (5,4).



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Classic 5.0®

Paso 8: Solución al modelo: Con sus palabras exprese la solución del modelo, es decir, contextualice los resultados que obtuvo.

El polinomio cuadrático que interpola los puntos (1,3),(2,−1) y (5,4) es:

$$p(x)=\frac{17}{12}x^2-\frac{99}{12}x+\frac{59}{6}.$$

5.3.2. Segundo ejemplo. Modelación. El salón comunal de un conjunto residencial tiene mesas con distintas capacidades y que se pueden ajustar a los eventos por realizar. Unas mesas tienen capacidad para cuatro sillas, otras para 8 y otras para 14. El administrador del conjunto encontró un inventario escrito de las mesas y de las sillas. El inventario escrito dice que, en total, hay 73 mesas y 228 sillas. Llamó la atención del administrador que el registro del último alquiler del salón comunal dice que se usaron 47 mesas contando con la mitad de las mesas de 8 sillas y la totalidad de las de 14 sillas. Para cotejar el inventario y programar el presupuesto para la asamblea de copropietarios del año siguiente se requiere saber cuántas mesas de cada tipo hay en el salón comunal.

Solución:

Paso 1: Discusión del problema: Después de leer atentamente el problema debemos reinterpretarlo: parafraseando, comentando y explicando con expresiones verbales propias.

No todas las mesas tienen el mismo tamaño ni la misma capacidad para que se puedan adaptar a las necesidades de copropietarios y residentes. En este caso hay tres tipos de mesas con diferentes números de sillas. El total de mesas y de sillas lo conocemos a partir del último inventario que es un conteo que bien el administrador hizo o delegó y que aparece en registros escritos y que ahora puede no corresponder con lo que efectivamente hay en el depósito. Además, tenemos la información puntual del último alquiler en el que se pidió y alquiló un número particular de mesas y de sillas.

Paso 2: Definición de las incógnitas presentes en el modelo. Hay que incluir la descripción completa de las incógnitas y si es el caso, las unidades en que se miden.

Como la pregunta es sobre el número de mesas de cada tipo, las incógnitas deben estar definidas así:

$x_i :=$ Número de mesas del tipo i en el inventario, donde $i = 1(4\ \textit{sillas}), 2(8\ \textit{sillas})$ y $3(14\ \textit{sillas})$.

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema. Hay que tener en cuenta los constreñimientos que están afectando el problema. Es muy conveniente rotular las ecuaciones con frases que indiquen a qué hace referencia cada limitación. En caso de ser necesario incluya las unidades de medida.

Total de mesas según el inventario	$x_1 + x_2 + x_3 = 73$
Total de sillas según el inventario	$4x_1 + 8x_2 + 14x_3 = 228$
Información del último alquiler	$\frac{1}{2}x_2 + x_3 = 47$

Paso 4: Condiciones técnicas: Imponga condiciones a las incógnitas definidas, para que sus valores cuantitativos tengan sentido dentro de la modelación.

Las incógnitas están definidas como número de mesas y por esto no pueden ser números negativos ni fraccionarios. Alguna de ellas podría ser igual a 0, cuya interpretación sería que ya no queda ninguna mesa con esa característica porque se dañaron o están inservibles.

$$x_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ para } i = 1(4\ \textit{sillas}),\ 2(8\ \textit{sillas}) \text{ y } 3(14\ \textit{sillas}).$$

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema (o el objeto matemático que represente la situación). Argumente la escogencia de este método.

Resolveremos este sistema usando la regla de Cramer por su eficiencia cuando se opera a mano.

Paso 6: Resuelva el sistema (o el objeto matemático que represente la situación), esto implica efectuar los cálculos apropiados para encontrar la solución cuantitativa.

El sistema correspondiente es $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 73 \\ 4x_1 + 8x_2 + 14x_3 = 228 \\ \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 47 \end{cases}$. El sistema matricial asociado es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 14 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 228 \\ 47 \end{pmatrix}$$

En primera instancia hay que calcular el determinante de la matriz de coeficientes para verificar que la regla de Cramer es una técnica viable.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 14 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

De este modo las incógnitas quedan calculadas individualmente como:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 73 & 1 & 1 \\ 228 & 8 & 14 \\ 47 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}}{-1} = -241; \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 73 & 1 \\ 4 & 228 & 14 \\ 0 & 47 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = 534 \;\; \text{y} \;\; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 73 \\ 4 & 8 & 228 \\ 0 & \frac{1}{2} & 47 \end{vmatrix}}{-1} = -220$$

Paso 7: Validación de la solución: Ahora que ya tiene los valores cuantitativos, verifique que satisfagan las restricciones que diseñó y las condiciones técnicas que impuso.

Total de mesas según el inventario	$-241+534-220=73$
Total de sillas según el inventario	$4\times(-241)+8\times 534+14\times(-220)=228$
Información del último alquiler	$\frac{1}{2}\times 534-220=47$

El sistema de ecuaciones está bien resuelto y el modelo está planteado de modo acorde con lo observado; sin embargo, la solución no satisface las condiciones técnicas porque son números enteros, pero dos de ellos son negativos. No hay interpretación posible para un número como -241 en términos de mesas de cuatro sillas.

Paso 8: Solución al modelo: Con sus palabras exprese la solución del modelo, es decir, contextualice los resultados que obtuvo.

El sistema tiene solución, pero el modelo no. Una conjetura que podemos hacer es que en el momento de hacer el inventario anterior, la persona encargada no verificó cuántas mesas y sillas en realidad se tenían, sino que apenas observó y dijo el número que le pareció más cercano. La Figura 1 muestra que en estos casos podemos revisar la situación y revisar el modelo. Otra opción puede ser destinar tiempo de la administración para hacer el inventario físico incluyendo la calificación del estado de las sillas y las mesas. Tal vez sería lo más sensato de hacer, aun cuando el resultado estuviera compuesto por números positivos, si es que se dispone de tiempo para hacerlo o hay suficiente margen de duda.

5.3.3. Tercer ejemplo. Modelación. Tres insumos se mezclan para producir tres tipos de fertilizantes orgánicos: básico, intermedio y acelerado. Un paquete del fertilizante básico se prepara con 10 g de restos de frutas, 30 g de restos de verduras y 60 g de pasto. Un paquete del fertilizante intermedio requiere mezclar 20 g de restos de frutas, 30 g de restos de verduras y 50 g de pasto. Cada paquete del fertilizante acelerado se prepara con 50 g de restos de frutas y 50 g de pasto. La plaza de abastos ha facilitado 1.400 g de restos de frutas, 1.200 g de restos de verduras, mientras que la empresa Corta y Poda El Césped ha entregado 3.100 g de pasto. Considerando que no es posible almacenar ni los restos de fruta o verduras ni el pasto cortado, ¿cuántos paquetes de los tres tipos de fertilizantes orgánicos se deben producir para aprovechar todos los insumos disponibles? Para el mes siguiente, la plaza de abastos anunció que solo podrá entregar 1.200 g de restos de frutas y la empresa Corta y Poda El Césped entregará 3.000 g de pasto. ¿Cómo afecta a la producción este cambio en la disponibilidad de insumos?

Solución:

Paso 1: Discusión del problema:

Se están produciendo tres tipos de fertilizantes, todos tienen los mismos insumos pero no en la misma proporción. Los insumos son restos de frutas y verduras más pasto cortado. No hay un insumo inerte como tierra negra, que les sirva como vehículo porque cada una de las sumas de los gramos empleados es igual a 100 por paquete. La producción está sujeta a la disponibilidad de los insumos, pero no puede quedar ningún sobrante ya que lo que quede se pudre. Además, la disponibilidad depende de lo que surtan desde la plaza de abastos y la empresa Corta y Poda el Césped, esto provoca cambios en la productividad.

Paso 2: Definición de las incógnitas presentes en el modelo.

Como la pregunta es sobre el número de paquetes de cada tipo de fertilizante que se deben producir, las incógnitas deben estar definidas así:

$x_i :=$ Número de paquetes del fertilizante de tipo i que se va a producir para emplear todos los insumos disponibles $i = 1$(*básico*), 2(*intermedio*) y 3(*acelerado*).

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema.

Disponibilidad de restos de frutas, en gramos	$10x_1 + 20x_2 + 50x_3 = 1.400$
Disponibilidad de restos de verduras, en gramos	$30x_1 + 30x_2 = 1.200$
Disponibilidad de pasto cortado, en gramos	$60x_1 + 50x_2 + 50x_3 = 3.100$

Paso 4: Condiciones técnicas:

Los paquetes por producir deben estar completos, por lo que:

$$x_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ para } i=1(\textit{básico}),\ 2(\textit{intermedio}) \text{ y } 3(\textit{acelerado}).$$

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema.

En este caso es mejor resolver el sistema usando el método de la matriz inversa porque el vector de los términos independientes cambia. Si se resuelve con otro método habrá que hacer el mismo procedimiento dos veces.

Paso 6: Resuelva el sistema.

$$\text{Se debe resolver } \begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + 50x_3 = 1.400 \\ 30x_1 + 30x_2 = 1.200 \\ 60x_1 + 50x_2 + 50x_3 = 3.100 \end{cases}, \text{ es decir, } \begin{pmatrix} 10 & 20 & 50 \\ 30 & 30 & 0 \\ 60 & 50 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.400 \\ 1.200 \\ 3.100 \end{pmatrix}.$$

Este sistema se entiende como $AX=B$. Para saber si el método de la matriz inversa es la herramienta apropiada para resolver el sistema hay que saber si el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero. En efecto,

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 50 \\ 30 & 30 & 0 \\ 60 & 50 & 50 \end{vmatrix} = -30.000 \neq 0$$

Ahora hay que calcular los 9 cofactores de la matriz de coeficientes para encontrar la matriz de cofactores de A.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}|M_{11}|=\begin{vmatrix}30 & 0\\ 50 & 50\end{vmatrix}=1.500 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}|M_{12}|=-\begin{vmatrix}30 & 0\\ 60 & 50\end{vmatrix}=-1.500$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}|M_{13}|=\begin{vmatrix}30 & 30\\ 60 & 50\end{vmatrix}=-300 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}|M_{21}|=-\begin{vmatrix}20 & 50\\ 50 & 50\end{vmatrix}=1.500$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}|M_{22}|=\begin{vmatrix}10 & 50\\ 60 & 50\end{vmatrix}=-2.500 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}|M_{23}|=-\begin{vmatrix}10 & 20\\ 60 & 50\end{vmatrix}=700$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}|M_{31}|=\begin{vmatrix}20 & 50\\ 30 & 0\end{vmatrix}=-1.500 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}|M_{32}|=-\begin{vmatrix}10 & 50\\ 30 & 0\end{vmatrix}=1.500$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}|M_{33}|=\begin{vmatrix}10 & 20\\ 30 & 30\end{vmatrix}=-300 \qquad \mathrm{Cof}(A)=\begin{pmatrix}1.500 & -1.500 & -300\\ 1.500 & -2.500 & 700\\ -1.500 & 1.500 & -300\end{pmatrix}$$

Luego hay que encontrar la matriz adjunta de A, que es:

$$(Cof(A))^T=adj(A)=\begin{pmatrix}1.500 & 1.500 & -1.500\\ -1.500 & -2.500 & 1.500\\ -300 & 700 & -300\end{pmatrix}$$

Finalmente, la matriz inversa de A queda calculada como:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)=\frac{1}{-30000}\begin{pmatrix}1.500 & 1.500 & -1.500\\ -1.500 & -2.500 & 1.500\\ -300 & 700 & -300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{1}{20}\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{20}\\ \frac{1}{100} & \frac{-7}{300} & \frac{1}{100}\end{pmatrix}$$

De aquí que, $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{-1}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{1}{20}\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{20}\\ \frac{1}{100} & \frac{-7}{300} & \frac{1}{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.400\\ 1.200\\ 3.100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\ 15\\ 17\end{pmatrix}$.

Al cambiar la disponibilidad solo debemos cambiar el vector columna de los términos independientes y hacer la multiplicación.

$$X = A^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{-1}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{20} \\ \frac{1}{100} & \frac{-7}{300} & \frac{1}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.200 \\ 1.200 \\ 3.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Paso 7: Validación de la solución:

Hay que verificar que las operaciones se hicieron correctamente en los dos casos que se preguntan.

$$\begin{array}{ccc} 10 \times 25 + 20 \times 15 + 50 \times 17 = 1.400 & & 10 \times 30 + 20 \times 10 + 50 \times 14 = 1.200 \\ 30 \times 25 + 30 \times 15 = 1.200 & \text{y} & 30 \times 30 + 30 \times 10 = 1.200 \\ 60 \times 25 + 50 \times 15 + 50 \times 17 = 3.100 & & 60 \times 30 + 50 \times 10 + 50 \times 14 = 3.000 \end{array}$$

Paso 8: Solución al modelo:

Para emplear todos los insumos disponibles en el primer mes, la producción debe ser 25, 15 y 17 paquetes de los fertilizantes básico, intermedio y acelerado, respectivamente. Con los cambios en la disponibilidad de los insumos habrá un cambio en la producción a 30, 10 y 14 paquetes, respectivamente. Se observa que la producción del fertilizante básico se incrementa, pero la de intermedio y acelerado decaen al disminuir la disponibilidad de restos de frutas y de pasto cortado.

5.3.4. Una famosa cadena hotelera adquirió un total de 7.500 unidades entre almohadas, juegos de sábanas y cubrecamas, gastando un total de 899 millones de pesos. El precio de una almohada es 30 mil pesos, el de un juego de sábanas es 150 mil pesos y el de un cubrecama es 200 mil pesos. Además, el número de almohadas compradas excede en 600 al número de cubrecamas. ¿Cuántas almohadas, juegos de sábanas y cubrecamas ha comprado la cadena hotelera?

Solución:

Paso 1: Discusión del problema:

Tenemos un total de unidades compradas que es de 7.500 entre almohadas, juegos de sábanas y cubrecamas, y tendremos un dinero disponible de 899 millones de pesos para la adquisición de estos; además se conocen los precios de cada almohada, juegos de sábanas y cubrecamas, que en su orden son 30 mil, 150 mil y 200 mil pesos, respectivamente.

Paso 2: Definición de las incógnitas presentes en el modelo.

$x_i :=$ Número de elementos de lencería que ha comprado la cadena hotelera,
$i = 1(almohadas), 2(juegos\ de\ sábanas), 3(cubrecamas)$.

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema.

Total de unidades compradas	$x_1 + x_2 + x_3 = 7500$
Total del gasto	$30.000x_1 + 150.000x_2 + 200.000x_3 = 899.000.000$

Número de almohadas compradas excede en 600 al número de cubrecamas $x_1 = x_3 + 600$

Paso 4: Condiciones técnicas:

En este caso, como las incógnitas corresponden a número de unidades, entre almohadas, juegos de sábanas y cubrecamas, no pueden ser números negativos ni fraccionarios. Podrían ser iguales a 0, considerando, por ejemplo, que alguno no fuese adquirido, con lo cual serían:

$x_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ para $i = i = 1(almohadas), 2(juegos\ de\ sábanas), 3(cubrecamas)$.

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema.

En este caso, es apropiado usar la regla de Cramer debido a su eficiencia ya que resolveremos manualmente.

Paso 6: Resuelva el sistema (o el objeto matemático que represente la situación), esto implica efectuar los cálculos apropiados para encontrar la solución cuantitativa.

Primero identifiquemos que el sistema de ecuaciones inicial se puede simplificar en:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7500 \\ 3x_1 + 15x_2 + 20x_3 = 89.900 \\ x_1 - x_3 = 600 \end{cases}$$

Donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 15 & 20 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $|A| = -7$. Por lo que:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7.500 & 1 & 1 \\ 89.900 & 15 & 20 \\ 600 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-7} = 2.800; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7.500 & 1 \\ 3 & 89.900 & 20 \\ 1 & 600 & -1 \end{vmatrix}}{-7} = 2.500; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7.500 \\ 3 & 15 & 89.900 \\ 1 & 0 & 600 \end{vmatrix}}{-7} = 2.200$$

Paso 7: Validación de la solución.

Total de unidades compradas $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 2.800 + 2.500 + 2.200 = 7.500$

Total del gasto $\quad 30.000x_1 + 150.000x_2 + 200.000x_3$

$$= 30.000 \times 2.800 + 150.000 \times 2.500 + 200.000 \times 2.200 = 899.000.000$$

El número de almohadas compradas excede en 600 al número de cubrecamas $x_1 = x_3 + 600$

$$2.800 = 2.200 + 600$$

Por otro lado, todas las cantidades son positivas.

5.4. Ejercicios guiados

5.4.1. Una empresa de producción de marroquinería desea invertir 16 millones de pesos en nueva materia prima para su nueva línea; les ofrecen cuero de procedencia italiana, argentina e india. Aquellos proveedores ofrecen una rentabilidad para la italiana de 30%, Argentina de 40% e india de 25%, por lo que deciden invertir 3 veces más con la materia prima argentina que la india. La empresa productora desea ver reflejada una rentabilidad en sus costos de $5.300.000 de pesos el primer año. ¿Cuánto deberá invertir la empresa en productos de cada uno de los países para emplear todo el dinero disponible para la nueva línea?

Paso 1: Discusión del problema: es importante entender por qué la empresa toma la decisión de comprar más materia prima al proveedor argentino que al indio y cómo decide hacer esta inversión, es decir, qué significa que haya decidido invertir 3 veces más con la materia prima argentina que la de India.

....

....

....

Paso 2: Definición de las incógnitas presentes en el modelo. Recuerde interpretar la pregunta para escribir las incógnitas.

....

....

....

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema. Las limitaciones de la inversión están dadas por la cantidad de dinero disponible para comprar la materia prima y la proyección de rentabilidad que tiene la empresa productora, así como la decisión de compra que ha tomado. Ahora, hay que escribirlas en lenguaje simbólico.

....
....
....

Paso 4: Condiciones técnicas: como la pregunta está formulada sobre el dinero que hay que invertir con cada proveedor, ello implica que las incógnitas no pueden considerar números negativos. ¿Habrá alguna otra consideración?

....
....
....

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema (o el objeto matemático que represente la situación).

....
....
....

Paso 6: Resuelva el sistema (o el objeto matemático que represente la situación), esto implica realizar los cálculos apropiados para encontrar la solución cuantitativa.

....
....
....

Paso 7: Validación de la solución: verifique que le quedaron bien hechos los cálculos y que lo encontrado sí resuelve la situación planteada.

....
....
....

Paso 8: Solución al modelo: remítase a la pregunta, y en los términos en que le preguntaron redacte su respuesta, es decir, la respuesta a la pregunta podría empezar con: la empresa de marroquinería debería invertir…

....
....
....

5.5. Ejercicios propuestos

5.5.1. Se hizo un estudio de transporte masivo en el portal del sur de Transmilenio en la ciudad de Bogotá en octubre de 2018. Se efectuaron observaciones los lunes, martes, miércoles y jueves a las 6 a.m., a la 1 p.m. y a las 6 p.m. Se encontró que, en estos 4 días, la suma de los promedios de los usuarios en estas tres franjas horarias fue de 7.005 personas. También se observó que el triple de usuarios promedio de la 1 p.m. excede en 805 pasajeros al promedio de usuarios de las 6 a.m., y que la suma de los pasajeros promedio de las 6 a.m. junto con los de la 1 p.m. es superior en 1.145 pasajeros al promedio de pasajeros de las 6 p.m. Para completar el estudio se requiere determinar el promedio de personas que utilizan el sistema en las tres franjas horarias. Si el precio del pasaje por persona es $2.200, ¿cuál es el ingreso promedio percibido por el sistema en cada franja horaria? ¿Cuál es el promedio total de ingresos en las tres franjas?

5.5.2. La multinacional L realizará pruebas de producción para un nuevo producto de limpieza de ropa, del cual se tienen que fabricar 8.000 unidades de 3 tipos diferentes. La totalidad de presupuesto destinado para la materia prima es 44 millones de pesos, los cuales se dividen así: para una unidad del producto con fragancia manzana se requiere una inversión de 6.000 pesos, para una unidad del producto con fragancia lavanda se invierten 7.000 pesos y para una unidad del producto con fragancia limón se invierten 3.000 pesos. La inversión de la mano de obra para su elaboración es de 16.500.000 pesos y se dividen así: para una unidad de fragancia manzana 2.000 pesos, para una unidad de fragancia lavanda es de 2.500 pesos y para una unidad de fragancia limón, 1.500 pesos. ¿Cuántas unidades de cada producto de limpieza para ropa se pueden fabricar según la información dada?

5.5.3. La empresa de productos de Odontología Sonrisa Feliz desea invertir 8 millones de pesos en materiales para la elaboración de tres calidades de resina diferentes, para luego ser vendidos a centros odontológicos. Tiene 3 opciones de proveedores para la importación: Estados Unidos, Alemania y Chile, para elaborar su resina. La materia prima de

EE. UU. genera una rentabilidad de 25%, la alemana 20% y la chilena 30%; la empresa quiere ver reflejada una rentabilidad en el primer semestre de 2.100.000 pesos; por otro lado, decide invertir 2 veces más con la materia prima de EE. UU. que con la alemana. ¿Cuánto debe invertir la empresa Sonrisa Feliz en producto de cada país para la elaboración de la resina?

5.5.4. Una empresa de muebles desea comprar sillas, para lo cual dispone de un presupuesto anual de 9 millones de pesos. El proveedor le ofrece tres tipos de sillas: sillas de tipo escritorio, sillas para comedor y sillas para restaurante. La rentabilidad para las sillas de tipo escritorio será de 40% al año; las sillas para comedor, 30% y las sillas para restaurante 25%. La empresa quiere ver una utilidad reflejada de 3.1 millones de pesos. En el primer año decide invertir tres veces más en sillas de tipo escritorio que en sillas para restaurante. ¿Cuánto debe invertir en cada una de las clases de sillas?

5.5.5. Un estudiante de ingeniería que cursó álgebra lineal en la universidad obtuvo los siguientes resultados: el duplo del primer corte más 3 veces la nota del corte 2 menos el duplo del corte 3 equivale a 6; por otro lado, el quíntuple del corte 1 más el doble del corte 2 excede en 7 al triplo del corte 3, y el triplo del corte 3 excede en 1/2 al doble de la suma del corte uno y el dos. Con esta información encuentre qué nota obtuvo el estudiante en cada uno de los tres cortes; ¿puede deducir si el estudiante aprobó álgebra lineal si se conoce que la nota de aprobación son las superiores o iguales a 3.0 y que los tres cortes tienen igual ponderación?

5.5.6. Determine el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ que satisfaga las condiciones:

$$p(1) = f(1), p'(1) = f'(1) \text{ y } p''(1) = f''(1), \text{ donde } f(x) = x^3.$$

5.5.7. Encuentre la descomposición en fracciones parciales que se sugiere:

$$\frac{x^2 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

5.6. Preguntas de tipo Saber Pro

Antes de abordar estas preguntas revise el desarrollo teórico presentado en su clase magistral 3. Tenga claridad sobre la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones, cómo determinar la inversa de una matriz haciendo uso de su adjunta. Algunas preguntas están orientadas a definiciones y al uso de propiedades de la matriz inversa.

5.6.1. Preguntas de selección múltiple de respuesta única

1) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ es correcto afirmar que:
   - A. $|A^{-1}| = -3$
   - B. $|A^{-1}| = -\frac{1}{3}$
   - C. $|A^{-1}| = \frac{1}{3}$
   - D. $|A^{-1}| = 3$

2) Si se tiene una matriz A tal que A_3, $|A| = 0$ se cumple que:
   - A. A es invertible
   - B. $|A^{-1}| = 0$
   - C. A es singular
   - D. A^T es invertible

3) Sea A una matriz cuadrada de orden 2. ¿Puede ocurrir que A no sea invertible?
   - A. Sí, y la matriz debe ser necesariamente 0_2.
   - B. Sí, y solo ocurre si la matriz tiene una columna o fila de ceros.
   - C. Sí, y no es necesario que la matriz sea nula.
   - D. No, pues toda matriz tiene inversa.

4) Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2-x \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y se sabe que A es una matriz singular, entonces x es:
   - A. $x = -3$
   - B. $x = -1$
   - C. $x = 1$
   - D. $x = 3$

5) Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 3y + 2z = -3 \\ 5x + 6y = 13 + z \\ 4x + 3z = 8 + y \end{cases}$

   entonces el valor de y está dado por:
   - A. $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}}$
   - B. $y = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -13 & 6 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}}$
   - C. $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -13 & -1 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}$
   - D. $y = \dfrac{\left\|\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & -1 \\ 4 & 8 & 3 \end{matrix}\right\|}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}}$

5.6.2. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta.

En las siguientes preguntas:

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

6) Si se tiene un sistema de ecuaciones de la forma matricial $AX = B$ y existe solución entonces
   1. A debe ser invertible
   2. B debe ser invertible
   3. $X = A^{-1}B$
   4. $X = \frac{B}{A}$

7) Si $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ se cumple que:
   1. A no es una matriz singular
   2. $|A^{-1}| = -\frac{1}{3}$
   3. $A_{22} = 1$
   4. Ningún elemento tiene cofactor 0

8) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, si se cumple que $AX = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ entonces:
   1. $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
   2. Equivale al sistema $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   3. $x = \frac{1}{5}$
   4. $y = -\frac{7}{5}$

9) Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 3y + 2z = -3 \\ 5x + 6y = 13 + z \\ 4x + 3z = 8 + y \end{cases}$ entonces la forma matricial $AX = B$ del sistema implica que:
   1. $z = 7$
   2. $y = 5$
   3. No tiene solución pues A es singular
   4. B es una matriz fila

10) Sea $C = \begin{pmatrix} k-3 & 2 \\ 1 & k^2 - k - 2 \end{pmatrix}$, si $|C^{-1}| = -\frac{1}{2}$
   1. $k = -3$
   2. $k = 1$
   3. $k = 2$
   4. $k = 3$

11) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ se cumple que:
   1. $|A^{-1}| = -\frac{1}{8}$
   2. $adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
   3. $|2(AA^{-1})| = 2$
   4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

12) Sea $A = \begin{pmatrix} k & 4 \\ -1 & 3-k \end{pmatrix}$, los valores de k que hacen que A sea singular son:
   1. $k = -4$
   2. $k = -1$
   3. $k = 1$
   4. $k = 4$

13) En la central de Abastos de Bogotá, Colombia el día 17 de agosto de 2018 tres comerciantes de aguacates compran las cantidades, en kilogramos, indicadas en la siguiente tabla:

	Lorena	**Hass Extra**	**Hass Primera**
Comerciante A	10	30	20
Comerciante B	15	18	14
Comerciante C	10	20	20

El pago realizado por cada una de las compras fue \$210.000, \$151.000, y \$170.000 respectivamente, así se tiene que:
   1. Cada kilo de aguacate Lorena cuesta \$2.500.
   2. Cada kilo de aguacate Hass extra cuesta \$4.000.
   3. Cada kilo de aguacate Hass de primera cuesta \$3.500.
   4. Cada kilo de aguacate Lorena cuesta \$3.000.

5.7. Recursos informáticos recomendados

5.7.1. Recursos de cálculo online

1. Symbolab: En https://es.symbolab.com/solver/matrix-inverse-calculator/inverse está la posibilidad de calcular la inversa de una matriz hasta de orden 7 usando el método de los cofactores. Además, otras sintaxis permiten evaluarla por diversos métodos que le pueden servir si desea profundizar en el tema. Así, puede usar el comando *invers*, o digitar en la barra de entrada $\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}^{-1}$ para calcular la inversa de una matriz.

   Recuerde que usted debe ser capaz de realizar los cálculos de manera manual cuando menos hasta matrices de orden 3; el software le será útil para verificar sus respuestas. Ahora bien, para matrices de orden superior el software resulta útil para evitar cálculos rutinarios.

   De otra parte, la sintaxis $adj\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$ permite evaluar la adjunta de una matriz. Esto puede ser igualmente útil para verificar algunos pasos intermedios. Sin embargo, recuerde que Symbolab le permite evaluar paso a paso los procesos de cálculo.

2. Wolfram Alpha: Las sintaxis $inv\{\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots a_{1n}\}, \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots a_{2n}\}, \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots a_{3n}\}\ldots,$ $inv\{\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots a_{1n}\}, \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots a_{2n}\}, {}^{-1}$ $\{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots a_{nn}\}, \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots a_{3n}\}, \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots a_{nn}\}\ldots,\}$ permiten determinar la inversa de una matriz. Entrega otros potentes elementos de la matriz que ya se han empleado, como el determinante y otros como los valores, el polinomio característico y los valores propios de la matriz que se abordarán posteriormente en el curso.

3. On Line MSchool: El enlace http://es.onlinemschool.com/math/assistance/matrix/inverse/ lleva a un entorno que permite calcular la inversa de una matriz hasta de orden 7. Lo interesante es que lo hace por un método que no es el visto en el curso por las limitantes de tiempo, pero que puede ser estudiado por quienes estén interesados en ampliar sus conocimientos y adquirir habilidades en el uso de diversos métodos de cálculo.

4. Mats∮acil: En https://www.matesfacil.com/matrices/resueltos-matrices-inversa-adjunta.html usted encontrará 9 ejercicios básicos de inversa de determinantes. Intente resolverlos antes de recurrir a las soluciones. El ejercicio 7 involucra una matriz con entradas complejas.

5.7.2. Algunos videos de apoyo

1. Sistema de ecuaciones lineales (Solución de problemas) Método de Cramer https://www.youtube.com/watch?v=hktEjviDPjE (13:30)
2. Sistemas de ecuaciones lineales (Problema de aplicación) Métodos básicos (Eliminación) https://www.youtube.com/watch?v=fhdUsRm1uPw (12:00)
3. Determinación de un polinomio desde un conjunto de condiciones (Sistemas de ecuaciones lineales) https://www.youtube.com/watch?v=fkUVKfJivls (8:55)
4. Sistema de ecuaciones lineales - Método de la matriz inversa https://www.youtube.com/watch?v=xIVT7GY1Gzg (13:49)
5. Tipos de soluciones en sistemas de ecuaciones lineales https://www.youtube.com/watch?v=ZHBjsUIN2Ow (9:14)

6 ELIMINACIÓN DE GAUSS Y ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

6.1 Introducción

En esta sección estudiaremos desde situaciones problema y ejercicios relacionados con los dos métodos de eliminación: la eliminación de Gauss (o gaussiana) y la eliminación de Gauss-Jordan. Estos dos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales son muy versátiles y los puede aplicar en cualquier caso que se le presente. Recuerde que cualquier sistema arbitrario de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede presentar las siguientes posibilidades:

1. El sistema no tiene solución, se dice que es inconsistente.
2. El sistema tiene única solución, se dice que es consistente.
3. El sistema tiene infinitas soluciones, se dice que es dependiente.

Los dos métodos de eliminación proveen solución a las posibilidades que acabamos de mencionar. Entre estos sistemas se encuentran los sistemas lineales cuadrados con determinante de la matriz de coeficientes igual a cero o diferente de cero y, por tanto, los puede abordar con estas herramientas. Igual que en las secciones anteriores, la elección de la herramienta se hace para cada sistema y se basa en la eficiencia de la obtención de la solución cuantitativa. En la Figura 4 se resumieron los casos en que se pueden implementar los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales.

6.2. Objetivos de información

- Afianzar la reducción por filas.
- Aplicar las eliminaciones para resolver situaciones problema cuyos sistemas de ecuaciones sean inconsistentes o dependientes.
- Resolver situaciones problema que tienen infinitas soluciones.

6.3. Ejemplos resueltos

6.3.1. Primer ejemplo. Conceptual. Considere la familia de sistemas de ecuaciones lineales $\begin{cases} x-y=1 \\ ax+4y=b \end{cases}$ donde a y b son números reales (parámetros) variando en el intervalo $[-10{,}10]$.

Con ayuda de *software* y de la reducción por filas, encuentre: los valores de a y b para los que el sistema tiene solución única, infinitas soluciones o es inconsistente.

Solución:

Para tener una ayuda visual se sugiere el uso de Geogebra®. Para lograr un análisis gráfico adecuado escriba cada ecuación en su forma común, $y=mx+b$. Luego, cree deslizadores para a y b, dentro del intervalo definido para ellos, que le permitan percibir las propiedades geométricas de algunos miembros de la familia dada. Establezca conjeturas[1] dirigidas a contestar las preguntas.

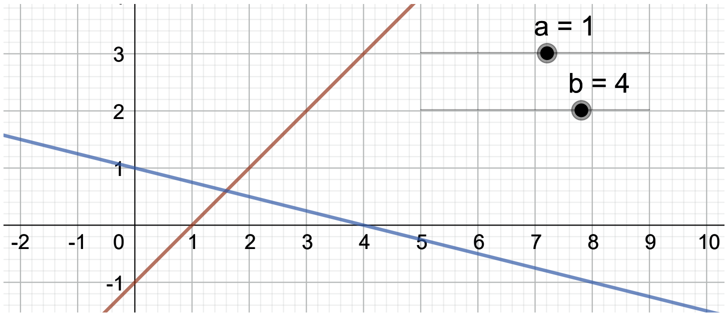
La matriz aumentada es $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & b \end{array}\right)$. Así, $-aF_1+F_2 \to F_2$, $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+4 & b-a \end{array}\right)$;

1 La Real Academia de la Lengua Española define conjeturar como formar juicio de algo por indicios u observaciones (Real Académica de la Lengua Española, 2018).

$\frac{1}{a+4}F_2 \rightarrow F_2\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{1}{\frac{b-a}{a+4}} \\ 0 & 1 & \end{array}\right)$; note que para este paso $a \neq -4$. Finalmente,

$$F_2 + F_1 \rightarrow F_1\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{b+4}{a+4} \\ 0 & 1 & \frac{b-a}{a+4} \end{array}\right).$$

Figura 7. Gráficas con deslizadores para sistema de ecuaciones.



Fuente: Elaboración propia en Geogebra Classic 5.0®

La matriz escalonada reducida está indicando que el sistema es inconsistente cuando $a=-4$ y $b\neq-4$ (las rectas son paralelas), también dice que si $a=b=-4$, el sistema es dependiente (las rectas comparten todos los puntos). Cuando $a\neq-4$ y $b\neq-4$, el sistema tiene solución única.

6.3.2. Segundo ejemplo. Modelación. Para una obra civil, un ingeniero contratista dispone de 15.000 horas-hombre de mano de obra para los proyectos: reparación del puente alto, pavimento del sector C de la autopista y adecuación de la acera número 25 que responde a la acción popular. Las horas-hombre de los tres proyectos han sido tasadas en \$8.000, \$10.000 y \$12.000, respectivamente, y el presupuesto total es \$53.000.000. La reparación del puente alto requiere un número de horas-hombre igual a la suma de las horas-hombre requeridas para los proyectos de pavimento del sector C de la autopista y adecuación de la acera número 25. Organice la mano de obra para los proyectos, es decir, calcule el número de horas-hombre para cada proyecto.

Solución:

Paso 1: Discusión del problema.

Para llevar a cabo los tres proyectos se requiere destinar horas-hombre que pueda desarrollarlos. Como los proyectos tienen diferente nivel de dificultad, las horas-hombre requeridas tienen diferentes costos que deben ser cubiertos con el presupuesto total. La reparación del puente alto toma más tiempo que los otros proyectos; incluso toma un tiempo igual a los otros dos sumados. Hay que encontrar cuántas horas-hombre se deben destinar a cada proyecto.

Paso 2: Definición de las incógnitas presentes en el modelo.

$x_i :=$ Número de horas−hombre que se requieren para el proyecto i,

$i=1$ (reparación del puente alto),2 (pavimento del sector C de la autopista) y

3 (adecuación de la acera número 25).

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema.

Total de horas-hombre	$x_1+x_2+x_3=15.000$
Presupuesto total	$8.000x_1+10.000x_2+12.000x_3=53.000.000$
Requerimientos por tamaño de obra	$x_1=x_2+x_3$

Paso 4: Condiciones técnicas.

Como las incógnitas corresponden a número de horas, se pueden emplear números positivos. Aunque cero es un valor plausible, en este caso no se incluirá porque todos los proyectos deben cubrirse. Las fracciones de hora también son entendibles. $x_i \in \mathbb{R}^+$ para $i=1,2$ y 3.

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema.

El sistema se resolverá por el método de eliminación gaussiana.

Paso 6: Resuelva el sistema.

El sistema es $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=15.000 \\ 8.000x_1+10.000x_2+12.000x_3=53.000.000 \\ x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$. La segunda ecuación puede ser multiplicada por el escalar $\frac{1}{1000}$ para mejorar el cálculo que debemos hacer.

La matriz aumentada correspondiente es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15.000 \\ 8 & 10 & 12 & 53.000 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$. De modo que la reducción por filas es

$$-8F_1+F_2\rightarrow F_2, -F_{1+}F_3\rightarrow F_3\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15.000 \\ 0 & 2 & 4 & -67.000 \\ 0 & -2 & -2 & -15.000 \end{array}\right); \frac{1}{2}F_2\rightarrow F_2\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15.000 \\ 0 & 1 & 2 & -33.500 \\ 0 & -2 & -2 & -15.000 \end{array}\right)$$

$$2F_2+F_3\rightarrow F_3\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15.000 \\ 0 & 1 & 2 & -33.500 \\ 0 & 0 & 2 & -82.000 \end{array}\right); 2F_3\rightarrow F_3\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15.000 \\ 0 & 1 & 2 & -33.500 \\ 0 & 0 & 1 & -41.000 \end{array}\right) \quad .$$

Paso 7: Validación de la solución.

Al observar la matriz de coeficientes, ya se encuentra escalonada. Cuando se interpreta la última fila de la matriz aumentada se observa que $x_3 = -41.000$. Esto indica que el sistema tiene solución, pero el modelo no.

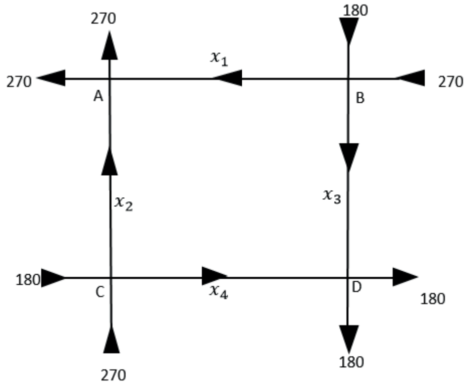
Paso 8: Solución al modelo.

El modelo no tiene solución, aunque el sistema sí. Las limitaciones del problema deben ser revisadas como lo sugiere la Figura 1 porque alguno de estos datos no se recolectó correctamente. Puede ser que los proyectos consumen más horas de las que se tienen pensadas o que los costos de las horas-hombre exceden lo presupuestado (presupuesto insuficiente).

6.3.3. Tercer ejemplo. Modelación. La Figura 8 representa el diagrama del flujo de tráfico de una malla vial en donde las calles tienen un solo sentido marcado por las flechas. Las intersecciones están marcadas con letras mayúsculas. Los vehículos no se pueden quedar estacionados en las intersecciones, es decir, los vehículos que entran a las intersecciones deben salir. x_i está representando el número de vehículos que circulan por hora por la calle i. Encuentre un sistema de ecuaciones que describa el diagrama del flujo de tráfico de la malla vial de la

Figura 8 para encontrar la cantidad de vehículos que puede circular por hora en cada una de las calles. Posteriormente, organice dicho flujo de forma tal que impacte lo menos posible a los usuarios de estas calles, esto implica hacer la menor cantidad de cambios posibles.

Figura 8. Mapa vial.



Fuente: Elaboración propia.

Solución:

Paso 1: Discusión del problema:

Esta situación problema está indicando que hay cuatro intersecciones que están marcadas con A, B, C y D. La premisa que rige este problema se basa en que ningún vehículo se puede quedar estacionado en las intersecciones y, por tanto, todo vehículo que entra debe salir. Las flechas señalan el sentido en que pueden circular los vehículos y todas las vías son de sentido único. Hay que encontrar cuántos vehículos pasan por hora en cada una de las vías, con las condiciones de que, si los valores encontrados son negativos, ello indicará que se requiere cambiar de sentido la vía y si el valor es cero, esto implicará que la vía debe ser cerrada. Hay que evitar hacer muchos cambios en los sentidos de las calles o en cerrar algunas, porque esto afecta mucho a los usuarios.

Paso 2: Definición de las incógnitas presentes en el modelo.

$x_i :=$ Número de vehículos que circulan por hora en la calle $i, i = 1,2,3$ y 4.

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema.

Las restricciones están dadas por la imposibilidad de estacionarse en las intersecciones, lo cual se traduce en cuatro restricciones, una por cada intersección. Los vehículos que entran deben salir.

Intersección A $x_1 + x_2 = 270 + 270$
Intersección B $180 + 270 = x_1 + x_3$
Intersección C $180 + 270 = x_2 + x_4$
Intersección D $x_3 + x_4 = 180 + 180$

Paso 4: Condiciones técnicas:

Las incógnitas toman valores enteros positivos para representar los números de vehículos por hora que circulan en el sentido original de la vía, números enteros negativos si la calle debe cambiar de sentido y cero si por la calle no circula ningún vehículo. $x_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1,2,3$ y 4.

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema.

Se empleará el método de eliminación de Gauss-Jordan porque es un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas.

Paso 6: Resuelva el sistema.

El planteamiento que se hizo debe ser modificado para que se convierta en el sistema estándar por resolver (las incógnitas en un solo lado de la ecuación y los términos independientes en el otro lado), así que el sistema es:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 540 \\ x_1 + x_3 = 450 \\ x_2 + x_4 = 450 \\ x_3 + x_4 = 360 \end{cases} \text{ y su matriz aumentada queda como } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 540 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 450 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 450 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 360 \end{array}\right).$$

La matriz escalonada reducida es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 90 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 450 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Esta matriz refleja que el sistema tiene infinitas soluciones y todas dependen de un parámetro, el valor de x_4, así las soluciones hacen parte de una familia monoparamétrica que se escribe de forma general como:

$$\begin{gathered} x_1 = 90+\mathrm{t} \\ x_2 = 450-\mathrm{t} \\ x_3 = 360-\mathrm{t} \\ x_4 = t \ \text{ donde } t \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

Paso 7: Validación de la solución:

Al sustituir las incógnitas en las ecuaciones se satisfacen las igualdades. Los valores que debe tomar t deben ser apropiados para que las incógnitas sean valores enteros, es decir, t no podría tomar un valor como $-0{,}57$ (en el sistema sí, pero en el modelo no).

Paso 8: Solución al modelo:

El sistema tiene infinitas soluciones y el modelo también, pero de todas ellas debemos elegir alguna que cause la menor cantidad de contratiempos a los usuarios de esta malla vial. Debemos evitar cambiar de sentido o cerrar vías, por lo que el valor de t debe ser un entero menor que 360 y que 450; esta expresión es $t \in (0,360) \cap \mathbb{Z}$. Usted puede elegir, por ejemplo, $t = 300$, así todas las vías le quedan activas y no tiene que cambiar de sentido ninguna,

$$x_1 = 390,\ x_2 = 150,\ x_3 = 60 \ \text{ y } \ x_4 = 300.$$

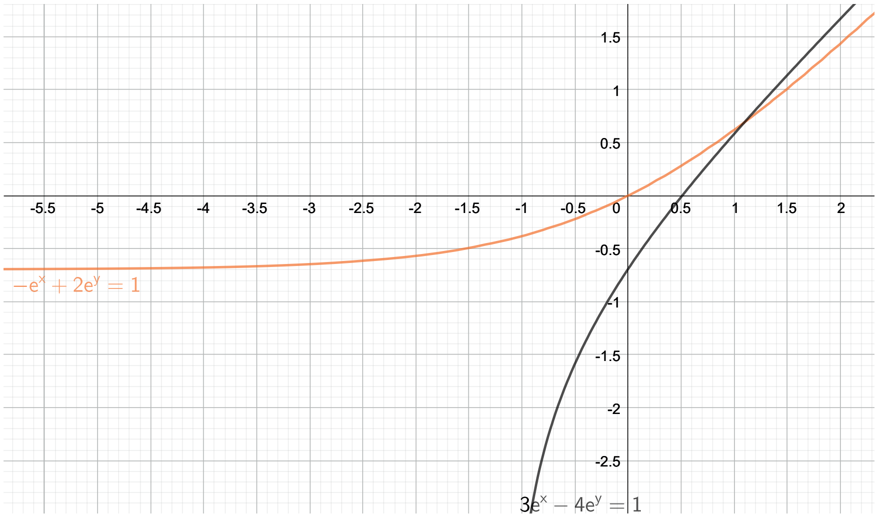
Esta solución satisface los requerimientos mencionados; sin embargo, es susceptible de mejoría porque la vía x_1 quedó con un flujo vehicular alto, lo que puede impactar en el estado de la vía. Si pasan muchos camiones, buses y autos y la vía no está preparada para ello, se deteriora rápidamente. Por otro lado, la vía x_3 quedó subutilizada ya que solo circulan 60 vehículos por ella. Es su oportunidad de idear una solución más adecuada.

6.3.4. Cuarto ejemplo. Aplicación. Resuelva el sistema $\begin{cases} -e^x + 2e^y = 1 \\ 3e^x - 4e^y = 1 \end{cases}$.

Solución:

Este sistema no es lineal; no obstante, las técnicas de solución de los sistemas lineales permiten encontrar la solución después de hacer una sustitución (ver la Figura 9).

Figura 9. Gráfica de las curvas del sistema no lineal.



Fuente: Elaboración propia.

Las sustituciones $u = e^x$ y $v = e^y$ hacen que el sistema luzca como $\begin{cases} -u + 2v = 1 \\ 3u - 4v = 1 \end{cases}$. Como es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, no se requieren métodos sofisticados para su solución. Al resolver por igualación se obtiene que $u = 3$ y $v = 2$. Esto se traduce en que $e^x = 3$ y $e^y = 2$. Al aplicar $f(x) = \ln x$ y $g(y) = \ln y$, se encuentra que $x = \ln 3$ y $y = \ln 2$.

6.4. Ejercicios guiados

6.4.1. Primer ejemplo. Solución de problemas. Se registraron las siguientes compras en una distribuidora de dulces al menudeo: el primer cliente pagó \$6.550 por 2 caramelos, 3 gomas de mascar y 5 bombones; el segundo cliente pagó \$5.200 por 5 caramelos, 2 gomas de mascar y 3 bombones; y el tercer cliente pagó \$5.100 por 3 caramelos, 4 gomas de mascar y 2 bombones. ¿Qué precio tiene cada caramelo, cada goma de mascar y cada bombón cuando se compran al menudeo?

Paso 1: Discusión del problema. Se ha considerado este problema muy sencillo para ofrecer orientación en la interpretación del problema y en la organización de la información. En ocasiones se puede formular una tabla como la que se muestra a continuación.

Productos/Clientes	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3
Caramelos	2	5	3
Gomas de mascar	3	2	4
Bombones	5	3	2
Pago total	6.550	5.200	5.100

Para finalizar la discusión del problema, escriba qué significa "al menudeo" en el proceso de distribución de dulces.

....

....

Paso 2: Definición de las incógnitas presentes en el modelo. Reinterpretando la pregunta puede obtener la descripción de las incógnitas. No olvide usar notación precisa.

....

....

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema. Observe que la tabla para este problema no coincide con la matriz del sistema. Para escribir las ecuaciones correspondientes al pago de cada cliente debe usar las columnas de la tabla.

....

....

Paso 4: Condiciones técnicas. Las incógnitas tienen que ver con dinero y, por tanto, deben tener condiciones para que puedan interpretarse los valores cuantitativos.

....

....

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema. Como esta sección es sobre los métodos de eliminación, por favor use esos métodos para resolver este sistema y así practicar lo estudiado.

Paso 6: Resuelva el sistema (o el objeto matemático que represente la situación).

....

....

Paso 7: Validación de la solución. Verifique si ejecutó bien el algoritmo de eliminación y si los valores encontrados corresponden a la imagen mental del problema que logró en el paso 1.

....

....

Paso 8: Solución al modelo. Redacte una respuesta en forma de oración (no solo los valores cuantitativos) y que conteste: ¿qué precio tiene cada caramelo, cada goma de mascar y cada bombón cuando se compran al menudeo?

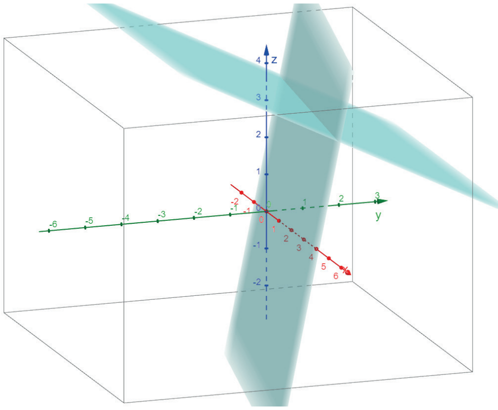
....

....

6.4.2. Segundo ejemplo. Teórico. Dado el sistema de ecuaciones lineales, $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$ aplique el método de eliminación de Gauss-Jordan para hallar la solución general.

Para iniciar la solución considere la Figura 10 en la que aparece la intersección de los dos planos del sistema. Esto da la idea de una solución general con infinitos puntos. El ejercicio indaga por la representación general de ellos.

Figura 10. Intersección de planos.



Fuente: Elaboración propia.

Ahora, cuente cuántas incógnitas tiene y cuántas ecuaciones tiene el sistema. ¿Qué observaciones puede hacer?

....

....

Plantee el sistema matricial equivalente para resolver por el método de eliminación de Gauss-Jordan (matriz aumentada).

....

....

Aplique las operaciones básicas entre filas para escalonar y reducir la matriz de coeficientes.

....

....

Para hallar la solución general, debe parametrizar. Esto implica tomar la tercera incógnita, que ahora será el parámetro, y expresar las otras dos incógnitas en términos de esta.

....

....

....

Una vez obtenida la solución general, asigne un valor al parámetro y con este halle una solución particular del sistema.

....

....

Compruebe que dicha solución particular satisface el sistema inicial dado.

....

....

¿Obtuvo la matriz escalonada reducida $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -34 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right)$? En la interpretación de esta matriz es x_3 quien se vuelve paramétrica, por lo que $x_1 = 11t - 34$; $x_2 = -2t + 7$; $x_3 = t$ con $t \in \mathbb{R}$. Cerciórese de haber obtenido esto como solución general.

6.5. Ejercicios propuestos

3.5.1. Una fábrica de camisetas publicitarias utiliza tres tipos de opciones para el cliente: camiseta polo, camisa manga corta y camisa manga larga. Cada camiseta polo necesita 2 minutos para el estampado, para el pegado 5 minutos y para el bordado 3 minutos; para cada camisa manga corta se requieren 3 minutos para el estampado, 4 minutos para el pegado y 4 minutos para el bordado, y para cada camisa manga larga se requieren 5 minutos para el estampado, 6 minutos el pegado y 4 minutos para el bordado. Si la planta de estampado está disponible 11 horas diarias, la planta de pegado 18 horas y la planta de bordado 13 horas, ¿cuántas camisas y camisetas de cada estilo se pueden producir por día de modo que las plantas se aprovechen a toda su capacidad?

6.5.2. Un cliente de una empresa de corretaje entrega un capital de \$117.000.000 para invertirlo en dos portafolios, el moderado y el de alto riesgo. El primer portafolio ofrece una rentabilidad de 7% anual y el segundo una rentabilidad de 16%. El cliente espera tener al final de año un rendimiento total de \$650.000. Para satisfacer la expectativa del cliente, ¿cuánto debe invertir la empresa en cada portafolio?

6.5.3. Una productora de alimentos produce 3 tipos de hojaldres: con bocadillo, con queso, con arequipe. Los 3 son horneados en diferentes máquinas (A, B y C). Los 3 tipos de hojaldres requieren las siguientes horas por horno:

6.5.4.

	Horno A	Horno B	Horno C
Bocadillo	2	1,5	2
Queso	1	1	1,5
Arequipe	1	2	2

El horno A tiene 295 horas disponibles de cocción al mes, el horno B 355 horas por mes, y el horno C 435 horas por mes. ¿Cuántos hojaldres deben producirse para emplear las horas disponibles al mes en los hornos?

6.5.5. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$, aplique el método de Gauss-Jordan para hallar la solución general.

6.5.6. Dado el sistema de ecuaciones; $\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 + (a-1)x_3 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = a+1 \end{cases}$, condicione el valor de a, si es posible para que:

a. El sistema tenga única solución.
b. El sistema no tenga solución.
c. El sistema tenga infinitas soluciones.

6.5.7. Dado el sistema de ecuaciones lineales, $\begin{cases} 3ax_1 - 2x_2 = 10 \\ 3x_1 - 2ax_2 = -10 \end{cases}$, condicione a, si es posible para que:

a. El sistema tenga única solución.
b. El sistema no tenga solución.
c. El sistema tenga infinitas soluciones.

6.6. Preguntas de tipo Saber Pro

Antes de tratar estas preguntas elabore un mapa conceptual alrededor de los objetos tratados en su clase magistral 4. Tenga presente las definiciones y procesos relacionados con los tipos de solución de sistemas de ecuaciones lineales y los métodos de solución mediante la matriz escalonada y la escalonada reducida.

6.6.1. Preguntas de selección múltiple con única respuesta

1) Se tiene el sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + (a^2 - 8)x_2 = a \end{cases}$, se puede afirmar que tiene infinitas soluciones si

   A. $a \neq -3$
   B. $a \neq 3$
   C. $a = -3$
   D. $a = 3$

2) El sistema $\begin{cases} ax_1 + (a-1)x_2 = 3 \\ 2ax_1 - 3ax_2 = 2 \end{cases}$, no tiene soluciones si

   A. $a \neq 0$
   B. $a = -\frac{2}{5}$
   C. $a = \frac{2}{5}$
   D. $a = 2$

3) Para el sistema $\begin{cases} 2ax_1 - 3(b-1)x_2 = 0 \\ (3a-1)x_1 + 2bx_2 = 4 \end{cases}$, tiene solución $(x_1, x_2) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ si

   A. $a = 1$
   B. $a = -1$
   C. $a = 2$
   D. $a = -2$

4) La matriz aumentada $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2-k & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$ puede ser llevada a la forma escalonada reducida si:

   A. $k = -3$
   B. $k \neq -2$
   C. $k \neq 2$
   D. $k \neq 3$

5) La matriz aumentada para el sistema $\begin{cases} x - 3y = -3 - 2z \\ 5x + 6y = 13 + z \\ 4x + 3z = 8 + y \end{cases}$ es

   A. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & 13 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 1 \end{array}\right)$

   B. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & -1 & -13 \\ 4 & -1 & 3 & -8 \end{array}\right)$

   C. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & 13 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & -1 \end{array}\right)$

   D. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 13 \\ 4 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right)$

6.6.2. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

6) Dadas $A=\begin{pmatrix}1&1&8&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ entonces:

1. A es escalonada.
2. B es escalonada.
3. A es invertible.
4. 4. B es invertible.

7) Si $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&3\\0&3&-2&2\\0&0&-1&1\end{array}\right)$ representa la matriz aumentada de un sistema 3×3 se cumple que:

1. El sistema no tiene solución.
2. El sistema tiene una solución.
3. Es posible llevarla a escalonada reducida.
4. El sistema tiene infinitas soluciones si $x_2=t$

8) La matriz $A=\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&2&-1&2\\2&-3&1&1&0\\0&0&1&2&3\end{array}\right)$ representa un sistema con incógnitas x,y,z,w debidamente ordenado, entonces:

1. Tiene solución única.
2. Se emplea un parámetro.
3. Si $w=t$ entonces $z=3+2t$
4. Si $w=t$ entonces $y=t-\frac{1}{4}$

9) Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases}x-3y+2z=-3\\5x+6y=13+z\\4x+3z=8+y\end{cases}$

1. $x=-2$
2. $y=-5$
3. $z=7$
4. $x=2$

10) En la central de abastos de Bogotá, el día 17 de agosto de 2018 tres comerciantes de aguacates compran las cantidades, en kilogramos, indicadas en la siguiente tabla:

	Lorena	**Hass Extra**	**Hass Primera**
Comerciante A	10	30	20
Comerciante B	15	45	30
Comerciante C	10	20	20

Los pagos realizados por ellos fueron \$210.000, \$151.000, y \$170.000, respectivamente, así se tiene que:

1. La matriz aumentada del sistema es:
$$\left(\begin{array}{ccc|c}10&15&10&210.000\\30&45&20&151.000\\20&30&20&170.000\end{array}\right)$$
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene solución si el precio por kg. del aguacate Lorena es \$2.000.
4. La matriz aumentada del sistema es equivalente a:
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&21.000\\3&9&6&30.200\\1&2&2&17.000\end{array}\right)$$

6.7. Recursos informáticos recomendados

6.7.1 Recursos de cálculo online

1. Symbolab: Permite en https://es.symbolab.com/solver/matrix-row-echelon-calculator y https://es.symbolab.com/solver/matrix-gauss-jordan-calculator respectivamente, calcular la matriz escalonada (matrice escalonada) y hallar la forma escalonada reducida de una matriz por Gauss-Jordan (gauss jordan).
2. Unice.fr: Una comunidad académica francesa diseñó un programa que permite digitar las ecuaciones de manera usual (desde el teclado) introduciendo una ecuación por línea. Tiene la potencialidad de trabajar sistemas de m ecuaciones con n incógnitas, e incluso permite trabajar con coeficientes que no sean constantes sino parámetros. Como desventaja está que no muestra los pasos de solución y solo entrega la solución de este; disponible en el enlace:
   http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=AE2A63EABB.1&lang=es&cmd=reply&-module=to
   Posee tres métodos de ingreso del sistema: método integral (escribir las ecuaciones directamente), método matricial (introducir la matriz de coeficientes y la columna de constantes), método individual (escribir los coeficientes uno a uno), lo cual es interesante pues permite ver los diferentes sistemas de representación y manipulación del sistema.
3. On Line MSchool: En el enlace http://es.onlinemschool.com/math/assistance/equation/gaus/ se puede resolver sistemas de n ecuaciones con n incógnitas hasta n=6 por el método de reducción de Gauss-Jordan, mostrando los pasos de cálculo.
4. Mats∮acil: En https://www.matesfacil.com/matrices/resueltos-matrices-SEL-GAUSS.html usted encontrará 10 ejercicios básicos de solución de sistemas de ecuaciones lineales por Gauss-Jordan. Intente resolverlos antes de recurrir a las soluciones presentadas. El ejercicio 10 involucra una matriz con entradas complejas para quienes desean ampliar su campo de conocimiento.
5. La calculadora online https://matrix.reshish.com/es/gauss-jordanElimination.php reduce por filas matrices devolviendo el resultado en los términos estudiados en el curso: solución única, sistema inconsistente o infinitas soluciones.

6.7.2. Algunos videos de apoyo

1. Detección de casos de los sistemas de ecuaciones lineales mediante eliminación de Gauss-Jordan https://youtu.be/yIeNYpkdUpQ (6:48)
2. Descomposición en fracciones parciales https://youtu.be/1y3wyc22I6o (8:24)
3. Asignación de mano de obra https://youtu.be/qQWPo8q9Zow (10:00)
4. Sistema de ecuaciones lineales (Solución general) https://www.youtube.com/watch?v=sz3T5zwcv3k (5:58)
5. Solución de sistema de ecuaciones lineales por matriz aumentada (Gauss-Jordan) https://www.youtube.com/watch?v=PpsBrpmxxWY (14:37)
6. Reducción método de Gauss-Jordan https://youtu.be/9ZInsFYuG3U (13:19)

7 PRIMERA AUTOEVALUACIÓN

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON MÚLTIPLE RESPUESTA

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

1) Para $A=(a_{ij})_{5\times 5}$ tal que $|A|=-2$ es cierto que
   1. $|A^{-1}|=-\frac{1}{2}$
   2. $|-AA^tA^{-1}|=2$
   3. $|4A^4|=-16$
   4. $|6A^t|=12$

2) Los valores de α para los cuales el sistema $\begin{cases}\alpha x+y+z=1\\ x+\alpha y+z=1\\ x+y+\alpha z=1\end{cases}$ no tiene única solución son
   1. $\alpha=3$
   2. $\alpha=1$
   3. $\alpha=0$
   4. $\alpha=-2$

3) Dos soluciones no triviales para el sistema homogéneo $(A-I_2)x=0$ donde $A=\begin{pmatrix}4&2\\3&3\end{pmatrix}$ son:
   1. $x=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
   2. $x=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$
   3. $x=\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$
   4. $x=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON ÚNICA RESPUESTA

4) El polinomio cuadrático $p(x)=ax^2+bx+c$ que satisface las condiciones $p(0)=-1$, $p(1)=2$ y $p(2)=3$ es:
   A. $p(x)=x^2+2x-1$
   B. $p(x)=x^2-4x-1$
   C. $p(x)=-x^2+4x-1$
   D. $p(x)=-x^2+2x+3$

5) Si la matriz escalonada reducida para algún sistema es $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&3\\0&1&5&0\\0&0&0&3\end{array}\right)$ se puede decir que el sistema:

A. tiene solución $x = 3, y = 1, z = 0$.

B. es inconsistente.

C. tiene solución $x = 2, y = 5, z = 0$

D. tiene infinitas soluciones.

6) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ es igual a:

A. abc

B. $(a-b-c)^2$

C. $(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$

D. $(a-b)(a-c)(b-c)$

TABLA DE RESPUESTAS

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					

PREGUNTAS ABIERTAS

7) Determine la intensidad de la corriente en cada red de circuito, sabiendo que en las redes 1, 2 y 3 de un circuito las relaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= 2 \\ I_1 - I_2 + 4I_3 &= 0 \\ -I_1 + 4I_2 &= 9 \end{aligned}$$

En donde I_1, I_2 e I_3 corresponden a las intensidades de las corrientes por cada una de las redes. Encuentre la intensidad de la corriente medida en amperios en las redes 1, 2, y 3 del circuito.

8) Determine la descomposición en fracciones parciales correspondiente a la forma dada

$$\frac{3x-9}{x^2-2x-15} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3}$$

8 VECTORES EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$, OPERACIONES Y PROPIEDADES

8.1 Introducción

La sección dedicada a los vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ aborda las operaciones básicas y las propiedades de estas. Puede considerar los *n-vectores* fila como matrices con n columnas y una sola fila $(1 \times n)$, también puede pensar en los *n-vectores* columna como matrices con n filas y una sola columna $(n \times 1)$ y, por tanto, las operaciones entre matrices y sus propiedades son aplicables en este contexto, con la ventaja de poder visualizar el efecto de las operaciones mediante gráficas. Por ejemplo, puede observarse lo que ocurre al multiplicar un escalar no nulo por un vector y el efecto que esto tiene sobre la norma y sobre la dirección del vector. Para notar los vectores se usará negrilla.

8.2 Objetivos de información

- Aplicar las definiciones de las operaciones básicas entre vectores e interpretar geométricamente los resultados.
- Analizar situaciones problema cuya base está en las operaciones básicas entre vectores.
- Emplear las diferentes representaciones de los vectores de acuerdo con los requerimientos de las situaciones problema.

8.3. Ejemplos resueltos

8.3.1. Primer ejemplo. Conceptual. Con los vectores $u=\langle -1,3\rangle, v=\langle 0,-2\rangle$, encuentre e interprete:

1. $u+v$
2. $3u$
3. $-2v$
4. $\|u\|$
5. $\frac{1}{\|u\|}u$

Solución:

Ejercicios de este tipo indagan por la capacidad de cálculo; no obstante, resulta interesante acompañarlos de una expresión verbal que explique lo que significa el resultado obtenido, y en lo posible, de una gráfica. La verbalización y las imágenes ayudan al entendimiento de los conceptos. La Figura 11 muestra las gráficas de los vectores resultantes, excepto el de la norma porque este es un número y no un vector.

a. $u+v=\langle -1+0,3-2\rangle=\langle -1,1\rangle$. El vector resultante es la diagonal del paralelogramo que tiene como lados los vectores adyacentes u y v.

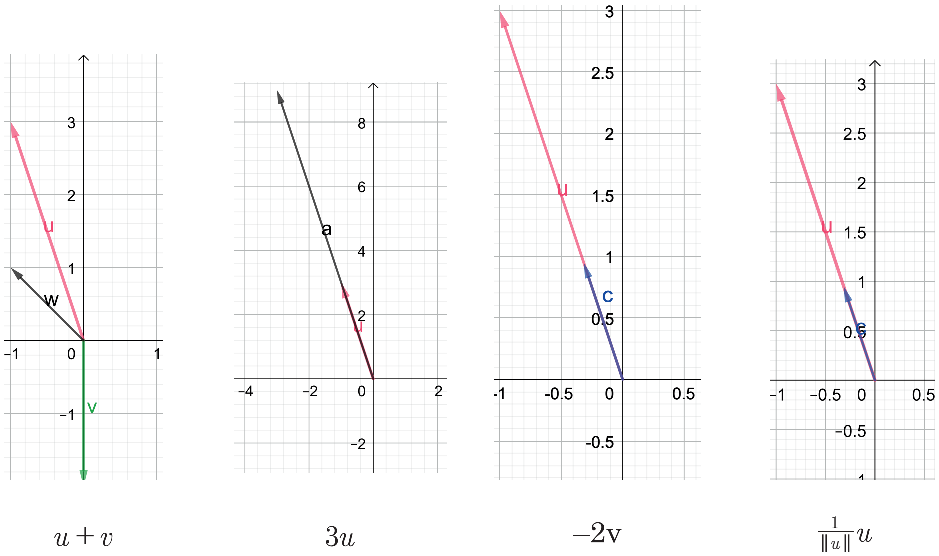
b. $3u=\langle 3(-1),3\times 3\rangle=\langle -3,9\rangle$. El vector resultante está en la misma dirección de u y mide el triple de lo que mide u.

c. $-2v=\langle -2\times 0,(-2)\times(-2)\rangle=\langle 0,4\rangle$. El vector obtenido está en dirección opuesta a la de v y mide el doble de lo que mide v.

d. $\|u\|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}\approx 3{,}1622$. El valor calculado es la norma de u, es decir, la magnitud o la longitud de u.

e. $\frac{1}{\|u\|}u=\frac{1}{\sqrt{10}}\langle -1,3\rangle=\left\langle \frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right\rangle$. El vector encontrado se llama la normalización de u y es un vector que se encuentra en la misma dirección de u y que es unitario, es decir, que mide 1. Note que $\|u\|>1$, entonces la normalización hará una contracción.

Figura 11. Gráficas de las operaciones entre vectores.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

8.3.2. Segundo ejemplo. Aplicación. Encuentre y represente un vector unitario paralelo[2] a la gráfica de $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ en el punto $(2,\sqrt{5})$ (adaptación de (Larson & Edwards, 2010, pág. 772)).

Solución:

El ejercicio está pidiendo un vector que tenga norma 1 y que se encuentre sobre la recta tangente a f en el punto de tangencia $(2,\sqrt{5})$. Para lograr el vector hay que calcular la recta tangente cuando $x=2$, en seguida se intersecará esta recta con la circunferencia unitaria (de radio 1 y centrada en el punto de tangencia) $(x-2)^2+\left(y-\sqrt{5}\right)^2=1$. Esta circunferencia actuará como un compás que ayudará a medir el vector para que sea unitario con punto inicial en $(2,\sqrt{5})$, el punto final estará en la intersección de la recta tangente y la circunferencia. Para el vector normal se usará la misma circunferencia, pero la recta empleada será la recta normal, esto es, la perpendicular a la recta tangente en el punto dado.

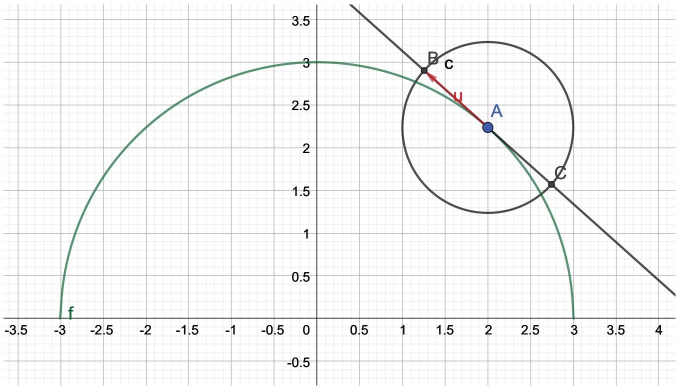
2 Este es un ejercicio típico de aplicación de vectores. En ocasiones preguntan por el vector unitario normal haciendo referencia a un vector que tiene norma 1 y que se encuentra sobre la recta normal, esto es, sobre la recta perpendicular a la recta tangente en el punto dado. Para el resto se procede de forma similar a la expuesta acá.

Dicho esto, la recta tangente a $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ en el punto $(2,\sqrt{5})$ es $y=\frac{-2\sqrt{5}}{5}x+\frac{9\sqrt{5}}{5}$ o aproximadamente $y=-0,89x+4,02$. Ahora, al trazar $(x-2)^2+\left(y-\sqrt{5}\right)^2=1$, aparece el sistema no lineal

$$\begin{cases} y=\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}x+\dfrac{9\sqrt{5}}{5} \\ (x-2)^2+\left(y-\sqrt{5}\right)^2=1 \end{cases}$$

que se puede resolver por sustitución y se encuentran $B\left(\frac{6-\sqrt{5}}{3},\frac{3\sqrt{5}+2}{3}\right)$ y $C\left(\frac{6-\sqrt{5}}{3},\frac{3\sqrt{5}-2}{3}\right)$. Finalmente se traza uno de los vectores que tiene punto inicial en $(2,\sqrt{5})$ y punto final en B. La Figura 12 es la representación final de los pasos de cálculo. El vector es $\overrightarrow{PQ}$ donde $P(2,\sqrt{5})$ y $Q\left(\frac{6-\sqrt{5}}{3},\frac{3\sqrt{5}+2}{3}\right)$.

Figura 12. Representación de un vector unitario paralelo a la gráfica de una función.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

8.3.3. Tercer ejemplo. Algorítmico. Dados los vectores $u=\langle 1,-3,4\rangle, v=\langle 1,0,2\rangle$ y $w=\langle 5,1,3\rangle$ encuentre un vector $z\in\mathbb{R}^3$ $-u+v-3w+z=0$.

Solución:

Este ejercicio contiene una ecuación que indaga por un vector de tres componentes $z=\langle z_1,z_2,z_3\rangle$, por lo que hay que encontrar un vector que sea apropiado de modo que la expresión de la izquierda sea igual al vector cero de tres componentes.

$$-u+v-3w+z=0$$
$$-\langle 1,-3,4\rangle+\langle 1,0,2\rangle-3\langle 5,1,3\rangle+\langle z_1,z_2,z_3\rangle=\langle 0,0,0\rangle$$
$$\langle -1,3,-4\rangle+\langle 1,0,2\rangle+\langle -15,-3,-9\rangle+\langle z_1,z_2,z_3\rangle=\langle 0,0,0\rangle$$
$$\langle -15+z_1,z_2-11+z_3\rangle=\langle 0,0,0\rangle$$

Se produce entonces una comparación de dos vectores de igual tamaño, por lo que las entradas deben corresponder, así:

$$\begin{cases} -15+z_1=0 \\ z_2=0 \\ -11+z_3=0 \end{cases}$$

De modo que $z_1=15, z_2=0$ y $z_3=11$. Por tanto, $z=\langle 15,0,11\rangle$.

8.3.4. Cuarto ejemplo. Aplicación. Dos cuerdas están actuando sobre un gancho (de manera similar a la Figura 13). Una de las cuerdas ejerce una fuerza horizontalmente de magnitud de 350 N y la otra cuerda con una fuerza de 200 N con una dirección θ. Escriba $\|\mathrm{F}\|$ y la dirección α de la fuerza resultante $\boldsymbol{F}$ como funciones del ángulo θ, con $0\leq\theta\leq\pi$. Luego, con ayuda de *software* represente las funciones que escribió. Describa el comportamiento de las funciones (adaptación de (Larson & Edwards, 2010, pág. 773)).

8.3.5.

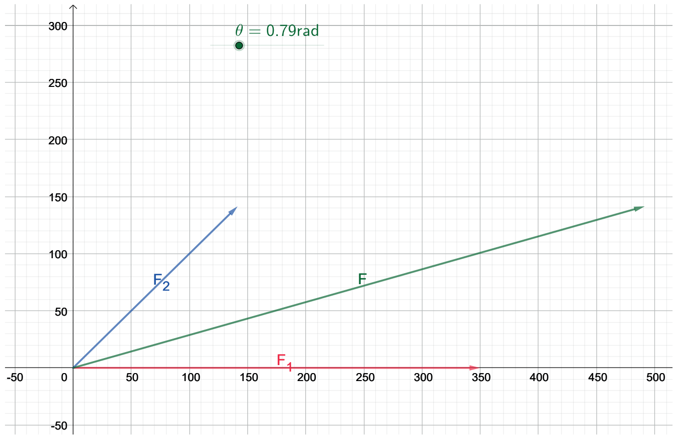
Figura 13. Fuerzas actuando sobre un gancho.

Fuente: Imagen gratuita de pixabay.com

Solución:

Paso 1: Discusión del problema: un esquema puede orientar el diseño de las funciones pedidas. Con ayuda de la herramienta *Deslizador* de Geogebra Classic 5.0 ® se preparó el esquema de la Figura 14, en la que $F = F_1 + F_2$ y $0 \leq \theta \leq \pi$ donde $F_1 = \langle 350, 0 \rangle$, $F_2 = \langle 200cos\theta, 200sen\theta \rangle$. La Figura 14 muestra una posición particular para $\boldsymbol{F}$.

Figura 14. Esquema de fuerzas actuando sobre un gancho.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

Paso 2: Definición de las variables presentes en el modelo: $F = F_1 + F_2$, $0 \leq \theta \leq \pi$ donde $F_1 = \langle 350, 0 \rangle$, $F_2 = \langle 200\,cos\,\theta, 200sen\theta \rangle$.

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema. Con el esquema y la definición de las fuerzas en términos de θ se puede escribir $F = F_1 + F_2 = \langle 350 + 200\,cos\,\theta, 200sen\theta \rangle$ con $0 \leq \theta \leq \pi$.

Así,

$\| F(\theta) \| = \sqrt{(350 + 200\,cos\,\theta)^2 + (200sen\theta)^2}$ con $0 \leq \theta \leq \pi$.

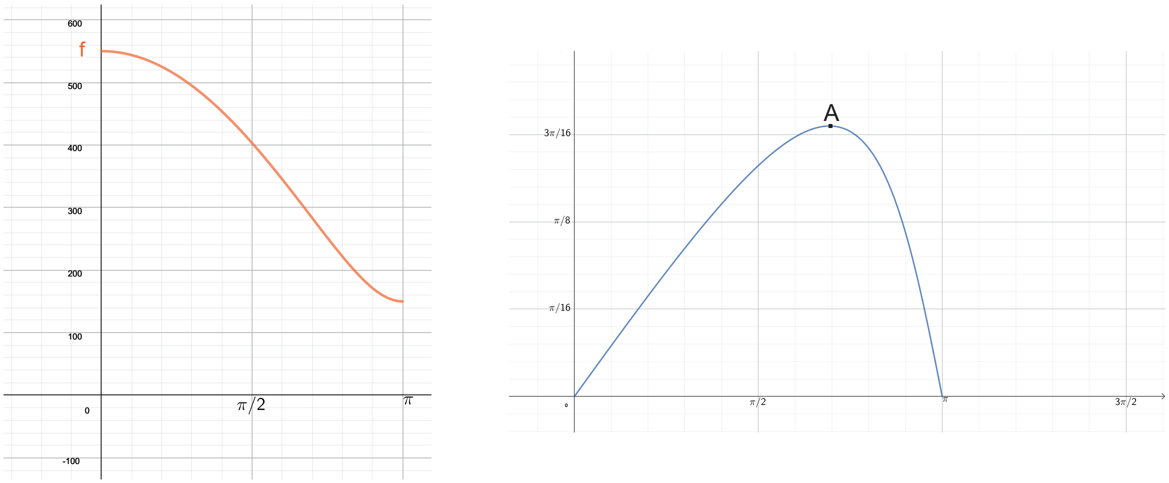
$$\alpha(\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{200sen\theta}{350 + 200\,cos\,\theta}\right) \text{ con } 350 + 200\cos\theta \neq 0$$

Paso 4: Condiciones técnicas: las magnitudes de las fuerzas son positivas o cero.

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema. Se realizarán las gráficas de las funciones que representan la magnitud y la dirección de la fuerza resultante usando Geogebra Classic 5.0 ®.

Paso 6: Resuelva el sistema (o el objeto matemático que represente la situación), esto implica realizar los cálculos apropiados para encontrar la solución cuantitativa. La Figura 15 muestra las gráficas de las funciones $\|F\|$ y α en términos de θ, que representan la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.

Figura 15. Gráficas de la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.



$\|F\|$ α

Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0

Paso 7: Validación de la solución: A medida que va aumentando el ángulo θ entre las dos fuerzas, ocurre lo siguiente: 1) la magnitud $\|F\|$ de la resultante va disminuyendo, incluso cuando $\theta = \pi$ las fuerzas F_1 y F_2 actúan en sentidos opuestos; y 2) la dirección α de la fuerza resultante va aumentando hasta que $\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{33}}{11}\right)$, en donde α alcanza su máximo valor. Luego, α decrece hasta que se anula cuando $\theta = \pi$ (ver la Figura 15).

8.4. Ejercicios guiados

8.4.1. Primer ejemplo. Aplicación. Para la función $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, que representa una semi-elipse, halle un vector unitario tangente a la curva y otro normal unitario a la curva en el punto $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Para el desarrollo de este ejercicio de aplicación requerimos algunos conceptos de cálculo diferencial. Para un proceso eficaz, siga los pasos sugeridos.

Derive la función dada y halle la ecuación de la recta tangente en el punto indicado.

....

....

....

Ahora tiene dos opciones, tomar un punto $x = a$, a la derecha de $x = 1$ o a la izquierda de $x = 1$, seleccione el que usted desee y remplace en la ecuación de la recta tangente para así obtener una pareja ordenada; ¿qué punto obtiene?

....

....

....

Con base en el punto $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, y el punto Q obtenido en el paso anterior, halle el vector dirigido que va de P a Q.

....

....

....

Este vector resultante del paso anterior ya es tangente a la función, ¿es unitario?; si no es así, busque el vector tangente unitario. ¿Cuál es su resultado?

....

....

....

Ahora, para responder la última pregunta sobre el vector normal unitario, tenga en cuenta que el producto de las pendientes de la recta tangente y la recta normal debe ser -1. Halle la pendiente y la ecuación de la recta normal en el punto P

....

....

....

Para hallar el vector normal unitario en P, repita el proceso descrito anteriormente para hallar el vector tangente unitario; ¿cuál es su resultado?

....

....

8.4.2. Segundo ejemplo. Aplicación. Dados los puntos $A(-3{,}1)$, $B(-2{,}-3)$, $C(3{,}-1)$, halle un punto $D(x{,}y)$, en el primer cuadrante, tal que el área del cuadrilátero formado por estos 4 puntos sea igual a 27. ¿Cuántas soluciones obtiene?, ¿cuántas soluciones enteras obtiene?

Para tener una imagen que ayude al desarrollo del ejercicio, grafique los puntos en el sistema cartesiano. Si observa en el gráfico, usted puede calcular el área del triángulo formado por los puntos A, B y C. ¿Qué resultado obtiene?

....

....

¿Qué puede deducir del valor del área restante, es decir, del área del triángulo con vértices en A, C y D?

....

....

La fórmula $A = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right\|$ permite encontrar el área del triángulo con vértices $A(x_1{,}y_1)$, $B(x_2{,}y_2)$, $C(x_3{,}y_3)$. Con esta fórmula, calcule el área del triángulo formado por los vértices A, C y D, e iguale al valor obtenido del paso anterior; ¿qué obtiene?

....

....

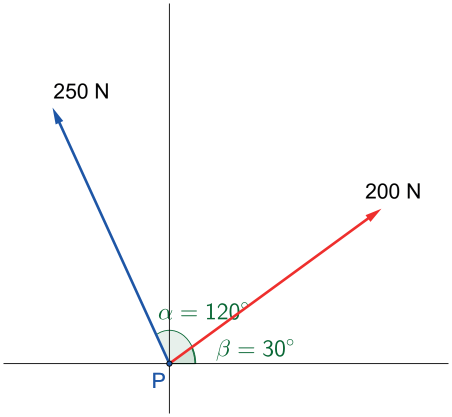
....

Con el resultado anterior, ¿cuántas soluciones tiene el problema inicial?, ¿cuántas de estas soluciones son enteras? Para esto ayúdese con un dibujo o con una construcción con Geogebra Classic 5.0 ®

....
....
....

8.4.3. Tercer ejemplo. Aplicación. Dos fuerzas con magnitudes de 200 N y de 250 N actúan sobre el punto P, como se muestra en la Figura 16. Halle la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.

Figura 16. Fuerzas sobre el punto P.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

Recuerde que el vector correspondiente a cada fuerza es de la forma $\langle F\cos\theta, F sen\theta\rangle$, donde F representa la fuerza aplicada y θ es el ángulo formado con respecto al semieje positivo de X (dirección); con base en esto calcule las fuerzas F_1 y F_2 resultantes para cada caso.

....
....
....

Sume estas dos fuerzas, así obtendrá la fuerza resultante. Calcule la norma de esta fuerza resultante, así contestará la primera pregunta, esto es la magnitud de la fuerza resultante. Para terminar, halle la dirección de la fuerza resultante.

....

....

8.4.4. Cuarto ejemplo. Teórico. ¿Es $v = \langle 1, 3, -7 \rangle$ una combinación lineal de los vectores $v_1 = \langle 1, 1, 2 \rangle$, $v_2 = \langle 2, 3, 7 \rangle$, $v_3 = \langle -1, 4, 13 \rangle$?

Como en las secciones anteriores de este texto, en las cuales se hace referencia a la combinación lineal, que es de gran importancia para los temas que siguen en el curso, debemos verificar si existen escalares c_1, c_2 y c_3, tales que $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$.

Realice $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$ con los vectores del enunciado.

....

....

Al simplificar lo anterior obtendrá un sistema de ecuaciones de 3×3, escriba dicho sistema. Escriba la matriz $A_{3\times 3}$, de tal sistema.

....

....

Antes de intentar cualquier método de solución, calcule el determinante de A. Con base en este resultado, ¿qué puede afirmar?

....

....

Solucione dicho sistema utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan. ¿A qué conclusión llega con la matriz escalonada reducida del sistema?

....

....

Finalmente, conteste la pregunta inicial.

....

....

8.5. Ejercicios propuestos

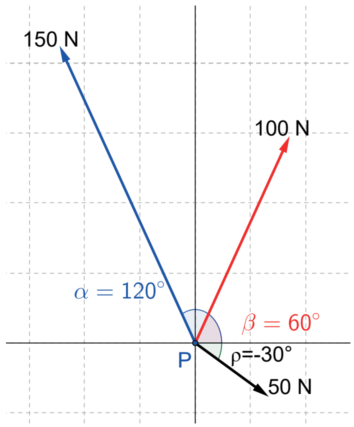
8.5.1. Para el triángulo con vértices en $A(-1,-3)$, $B(2,3)$ y $C(5,a)$, halle a, de tal modo que el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C, sea 18. ¿Hay más de una respuesta?, justifique.

8.5.2. Dados los vectores $\boldsymbol{u}=\langle 1,3\rangle$, $\boldsymbol{v}=\langle 2,-4\rangle$ y $\boldsymbol{w}=\langle x,y\rangle$, halle el vector $\boldsymbol{w}$, que satisface:

a. $3\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$
b. $-\boldsymbol{w}+4\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$

8.5.3. Tres fuerzas con magnitudes de 100 N, 150 N y 50 N actúan, sobre el punto P, como se muestra en la Figura 17; halle la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.

Figura 17. Tres fuerzas sobre el punto P.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

8.5.4. Dada la función $f(x)=\sqrt{4-x^2}+2$, halle un vector unitario tangente a la curva y otro normal unitario a la curva en el punto $P\left(1,\sqrt{3}+2\right)$.

8.5.5. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = \langle -1,3 \rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle -4,3 \rangle$, y $\boldsymbol{w} = \langle 1/2, 3/4 \rangle$, halle a y b, tal que $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$.

8.5.6. Dados los puntos $P(-1,4)$ y $Q(3,-2)$, halle:

a. Distancia entre los puntos P y Q.
b. El vector dirigido que va de P a Q.
c. El vector unitario que tiene la misma dirección del vector dirigido que va de P a Q.

8.5.7. Dados los puntos $P(1,3,-5)$ y $Q(0,6,-2)$, halle:

a. Distancia entre los puntos P y Q.
b. El vector dirigido que va de P y Q.
c. El vector unitario que tiene la misma dirección del vector dirigido que va de P a Q.

8.6. Preguntas de tipo Saber Pro

Revise previamente los conceptos teóricos presentados en la clase magistral 6. Debe tener claro qué es un vector y su representación tanto gráfica como analítica en 2 y 3 dimensiones. Igualmente tenga presente la manera como se operan los vectores y sus propiedades.

8.6.1. Preguntas de selección múltiple con única respuesta

1) Se tienen los puntos en $\mathbb{R}^3$, $P(2,2,-1)$ y $Q(-1,2,-1)$, entonces el vector $\overrightarrow{PQ}$ es:
   A. $\langle -1,4,1\rangle$
   B. $\langle 3,0,0\rangle$
   C. $\langle 1,-4,0\rangle$
   D. $\langle -3,0,0\rangle$

2) Sea el vector $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\frac{3}{4}\boldsymbol{k}$ se tiene que $\|\boldsymbol{u}\|$es:
   A. $\frac{3}{4}$
   B. $\frac{\sqrt{37}}{4}$
   C. $\frac{\sqrt{77}}{4}$
   D. $\frac{13}{4}$

3) Se tiene el triángulo PQR con vértices $(1,-1),(2,2),(3,0)$ respectivamente, entonces respecto al área A se puede decir que:
   A. $A=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}\right\|$
   B. $A=\left\|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}\right\|$
   C. $A=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}\right\|$
   D. $A=7$

4) Se tienen $\boldsymbol{u}=\langle 3,2\rangle$, $\boldsymbol{v}=\langle 2,4\rangle$ y $\boldsymbol{c}=\langle -2,-1\rangle$ y las constantes α y β entonces:
   A. $\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}$ si $\alpha=-2$
   B. $\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}$ si $\beta=\frac{1}{8}$
   C. No es posible que c sea una combinación lineal de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$
   D. c será una combinación lineal de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ si y solo si $\alpha+\beta=-5/8$

5) El vector $\overrightarrow{PQ}$ definido por $P(2,-3)$ y $Q(-3,2)$ NO está bien representado por:
   A. $\langle -5,5\rangle$
   B. $\langle 5\sqrt{2}\,cos\,135°, 5\sqrt{2}\,sen135°\rangle$
   C. $\langle -5\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}\rangle$
   D. $-5\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$

8.6.2 Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

6) Si $\boldsymbol{u}=\langle 3,-1\rangle$ y $\boldsymbol{v}=\langle 2,-3\rangle$, entonces los vectores unitarios en la dirección de $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$ son:
   1. $\left\langle -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right\rangle$
   2. $\left\langle \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\rangle$
   3. $\left\langle -\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\rangle$
   4. $\left\langle \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

7) Una partícula se mueve de forma que su posición es $\boldsymbol{r}(t)=\langle 3t-1, t^2+1\rangle$, es correcto afirmar que:
   1. La posición inicial es $\langle 0,0\rangle$
   2. La velocidad en la dirección del eje X es constante
   3. La aceleración es nula
   4. $\boldsymbol{r}(3)-\boldsymbol{r}(1)=\langle 6,8\rangle$

8) Un cuerpo se mueve bajo la acción de las fuerzas $\boldsymbol{F}_1=\langle -1,2,1\rangle, \boldsymbol{F}_2=\langle 1,-2,1\rangle, \boldsymbol{F}_3=\langle -1,-2,-1\rangle$, entonces la fuerza F_T total satisface que:
   1. Es nula
   2. $F_T=\langle -1,-2,1\rangle$
   3. $\| F_T \| = \sqrt{6}$
   4. F_T actúa solo a lo largo del eje x

9) Si $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=\sqrt{x+1}$ y P es uno de los puntos de intersección $(0,1)$ de las curvas, entonces:
   1. Un vector tangente unitario a f en P es $\langle 0,1\rangle$
   2. Un vector tangente unitario a g en P es $\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$
   3. El ángulo entre los vectores tangentes a las curvas en P es $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
   4. Los vectores tangentes a las curvas en P son perpendiculares.

10) Si $f(x)=(x-1)^2+1$ se cumple que los vectores tangente y normal unitarios a f en $P(0,2)$ son:
   1. $\left\langle -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$
   2. $\left\langle \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\rangle$
   3. $\left\langle -\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\rangle$
   4. $\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

11) Sobre un cuerpo actúan las fuerzas $F_1=\langle -1,1\rangle$ $F_2=\langle 1,-2\rangle, F_3=\langle -2,-1\rangle$ y $F_4=\langle a,b\rangle$. Si se sabe que la fuerza resultante es nula se debe cumplir que:
   1. F_4 forma un ángulo de $\theta=45°$ con el eje X
   2. $a=-2$
   3. $\| F_4 \| = 2\sqrt{2}$
   4. $F_4=\langle -2,-2\rangle$

12) Sean $\boldsymbol{u}=\langle 3,2\rangle$, $\boldsymbol{v}=\langle 2,4\rangle$, y $a=-3$, $b=-1$, las operaciones adecuadas son:
   1. $a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}=-\langle 11,10\rangle$
   2. $a(\boldsymbol{u}-a\boldsymbol{v})=\langle -27,-42\rangle$
   3. $a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}=\langle -12,-8\rangle$
   4. $a\boldsymbol{v}-b\boldsymbol{u}=\langle -9,-14\rangle$

8.7. Recursos informáticos recomendados

8.7.1. Recursos de cálculo online

1. Symbolab: Permite, con la entrada de las componentes del vector entre paréntesis y separados por comas, evaluar la suma, resta y multiplicación por un escalar. En el link https://es.symbolab.com/solver/vector-unit-calculator/unitario%20%5Cleft(3%2C-2%2C1%5Cright) se puede determinar el vector unitario de un vector dado mediante *unitario* (a,b,c). Adicionalmente si usted está inscrito le posibilita la práctica mediante ejercicios on line de los cuales usted recibe retroalimentación; dicha práctica está disponible en: https://es.symbolab.com/practice/vector-practice
2. Wolfram Alpha: Ofrece en http://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/linear-algebra/vectors/ una amplia gama de operaciones entre vectores. Adicionalmente se presenta el uso de diferentes representaciones de los vectores, lo que resulta importante en aplicaciones como en el caso de la física.
3. On Line MSchool: En http://es.onlinemschool.com/math/assistance/vector/calc/ permite trabajar la suma y resta de vectores tanto en el plano como en el espacio, y ellas combinadas con el producto por escalares. La entrada de los vectores se puede dar por coordenadas o por puntos. Adicionalmente en http://es.onlinemschool.com/math/assistance/vector/p_to_vector/ se posibilita calcular el vector determinado por dos puntos y en http://es.onlinemschool.com/math/assistance/vector/length/ se puede evaluar la longitud (magnitud, módulo o norma) del vector. Finalmente, http://es.onlinemschool.com/math/assistance/vector/multiply3/ permite encontrar el múltiplo escalar de un vector. En cada uno de ellos se ofrece, mediante un link, una guía sobre la operación por si usted aún tiene dudas sobre la teoría aplicada.
4. Mats□▒acil: En https://www.matesfacil.com/BAC/geometria3D/espacio/espacio-vectorial-definicion-propiedades-vector-libre-fijo-modulo-unitario-ejemplos.html y https://www.matesfacil.com/ESO/geometria_plana/vectores/ejercicios-resueltos-vectores-suma-producto-escalar-modulo.html presenta no solo la teoría de operaciones básicas entre vectores sino una serie de ejemplos y ejercicios propuestos y resueltos que pueden ayudarle a mejorar la conceptualización sobre los vectores.

8.7.2. Algunos videos de apoyo

1. Representación de vectores en el plano y en el espacio https://youtu.be/6hw-0o_Urhw (8:13)
2. Aplicación de los vectores (Sumatoria de fuerzas) https://www.youtube.com/watch?v=i-ZyP8Lpj3NA (4:41)
3. Vector en el espacio y vector unitario https://www.youtube.com/watch?v=gzjy_0dO8js (5:43)
4. Vector tangente y vector normal a una curva https://www.youtube.com/watch?v=eR-zePzo-v-U (8:14)
5. Vectores en R3 (Vectores en el espacio) https://youtu.be/1ViD87o8wv0 (12:43)

9 PRODUCTO PUNTO Y PRODUCTO CRUZ CON APLICACIONES

9.1 Introducción

La sección destinada al producto punto (escalar) y al producto cruz (vectorial) entre vectores explora las definiciones de estos dos productos haciendo énfasis en que el producto punto es aplicable a los vectores en el plano y en el espacio, mientras que el producto vectorial solo puede aplicarse a los vectores en el espacio. La Figura 18 resume las operaciones entre vectores y las posibilidades de aplicación para ellas. En la sección también se trabaja sobre los hechos de que el resultado del producto punto es un número y el resultado del producto cruz es un vector.

Figura 18. Operaciones entre vectores en el plano y en el espacio.

Fuente: Elaboración propia.

9.2. Objetivos de información

- Implementar las definiciones de producto punto y producto cruz.
- Aplicar la definición del producto punto en diferentes contextos geométricos y situaciones problema.
- Usar la definición del producto cruz en problemas de aplicación.
- Explorar el problema del área desde varios puntos de vista.

9.3. Ejemplos resueltos

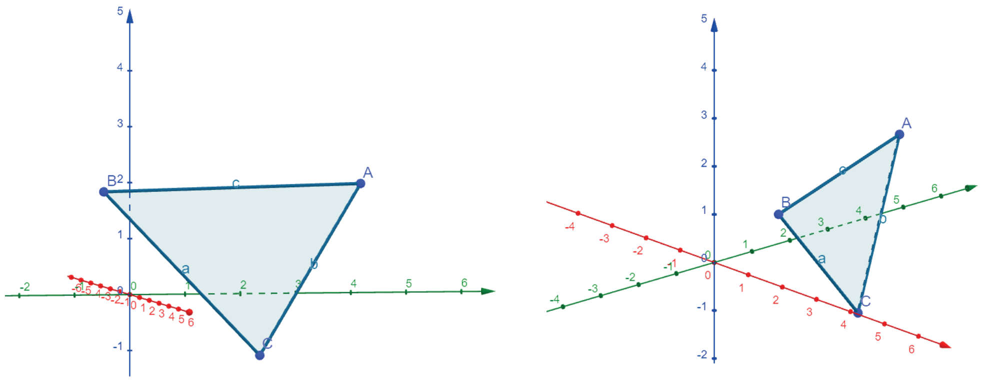
9.3.1. Primer ejemplo. Teórico. Determine el valor de α para el que los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ sean ortogonales, donde $\boldsymbol{u} = \langle 1,4,2 \rangle$ y $\boldsymbol{v} = \langle 0,\alpha,\alpha \rangle$.

Solución:
El ejercicio pregunta por un valor para k que haga que los vectores formen un ángulo de 90°. Aunque esta es la definición de ortogonalidad, necesitamos una caracterización algebraica y no geométrica para poder calcular. Debemos encontrar un valor para α de modo que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, esto es, $0 + 4\alpha + 2\alpha = 0$, de donde $6\alpha = 0$ y, por tanto, $\alpha = 0$. Así, $\boldsymbol{v} = \langle 0,0,0 \rangle$, pero la ortogonalidad no está definida con vectores nulos, por esto no existe el valor α para el que los vectores dados sean ortogonales.

9.3.2. Segundo ejemplo. Aplicación. Halle el área del triángulo determinado por los puntos $A(1,4,2)$, $B(3,-1,2)$ y $C(2,2,-1)$.

Solución:
La Figura 19 presenta dos vistas del triángulo al que se le calculará el área. Existen varias técnicas para hacer este cálculo. Aquí se presentarán tres de ellas.

Figura 19. Dos vistas del mismo triángulo[3] en el espacio para cálculo de área.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

Técnica 1: Esta técnica emplea la fórmula de Herón $A_{\Delta} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde s es el semiperímetro y a, b y c son las longitudes de los lados. Así,
$a = d_{BC} = 4{,}35$; $b = d_{AC} = 3{,}74$: y $c = d_{AB} = 5{,}38$, de donde

$$s = \frac{(4{,}35 + 3{,}74 + 5{,}38)}{2} = 6{,}74$$

Con lo cual, $A_{\Delta} = \sqrt{6{,}74(6{,}74-4{,}35)(6{,}74-3{,}74)(6{,}74-5{,}38)} = 8{,}08$ unidades cuadradas.

Técnica 2: Esta técnica usa el producto escalar para encontrar el ángulo entre vectores no nulos concurrentes en $A_{\Delta} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| sen\alpha$

De modo que se deben conformar los vectores concurrentes, es decir, deben tener el mismo punto inicial,

$\overrightarrow{AB} = \langle 3-1, -1-4, 2-2 \rangle = \langle 2, -5, 0 \rangle$ y $\overrightarrow{AC} = \langle 2-1, 2-4, -1-2 \rangle = \langle 1, -2, -3 \rangle$.

De aquí, $\|\overrightarrow{AB}\| = 5{,}38$ y $\|\overrightarrow{AC}\| = 3{,}74$.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = 0{,}59; \alpha = 53{,}44^{\circ}$$

3 Es importante usar las propiedades gráficas del software para explorar y reconocer las características del objeto geométrico, más aún cuando es tridimensional. En ocasiones, la primera vista no es la más apropiada por lo cual hay que hacer rotaciones.

$A_{\Delta}=\frac{1}{2}(5,38\times 3,74\times sen\,(53,44))=8,08$ unidades cuadradas.

Técnica 3: En este caso se usará el producto cruz como base de cálculo para $A_{\Delta}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Tal vez esta técnica es la más eficiente, dado que los vectores son de $\mathbb{R}^3$.

De nuevo se requieren los vectores concurrentes $\overrightarrow{AB}=\langle 2,-5,0\rangle$ y $\overrightarrow{AC}=\langle 1,-2,-3\rangle$.

Con estos vectores se calcula el producto cruz $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\langle 15,6,1\rangle$. La norma del producto cruz es $\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=16,19$ y con esto el área es $A_{\Delta}=\frac{1}{2}\times 16,19=8,08$ unidades cuadradas.

9.3.3. Tercer ejemplo. Aplicación. Halle el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

Solución:

El volumen V de un paralelepípedo con vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ como aristas adyacentes está dado por $V=|\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})|$ que es equivalente al valor absoluto del determinante de la matriz cuyas entradas son las componentes de los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

Así, el volumen es $V=\left\|\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}\right\|=3$ unidades cúbicas. Note que las barras internas representan el determinante de la matriz cuyas entradas son las componentes de los vectores y las barras externas corresponden al valor absoluto. El volumen es una medida y debe ser positiva.

9.4. Ejercicios guiados

9.4.1 Primer ejemplo. Aplicación. Determine si el triángulo con vértices en $A(1,0,-1)$, $A(1,0,-1)$,$B(2,5,4)$ y $C(1,-2,3)$ es isósceles.

Con ayuda de software, dibuje, en $\mathbb{R}^3$, el triángulo ABC. Para abordar el ejercicio recuerde qué es un triángulo isósceles. Una vez que tiene presente este concepto, tiene dos opciones para continuar con la solución. Para la primera opción, halle la distancia entre cada par de vértices.

....

....

¿Qué puede afirmar con respecto a estas distancias y qué le dice este resultado?

....

....

Ahora que ya terminó la primera opción, inicie la segunda que lleva al mismo resultado, pero utilizando un camino diferente; lo que se pretende es que usted refuerce diferentes conceptos de esta unidad. Con en el dibujo que realizó, halle los ángulos internos de dicho triángulo. Ayúdese del coseno del ángulo entre dos vectores, ¿cuáles son dichos ángulos?

....

....

Comparando estos ángulos internos, debe llegar al mismo resultado. ¿Cuál es este resultado?

....

....

9.4.2 Segundo ejemplo. Teórico. Verifique la ley del paralelogramo con los vectores $\boldsymbol{u}=\langle 1,-3,4\rangle$ y $\boldsymbol{v}=\langle -2,1,5\rangle$. La ley del paralelogramo nos dice que:

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2=2\|\boldsymbol{u}\|^2+2\|\boldsymbol{v}\|^2$$

Para su desarrollo calcule las operaciones $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$. Ahora, evalúe las normas $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|$ y $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$.

....

....

Simplifique $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2$

....

....

Ahora que ya tenemos el resultado del lado izquierdo de la igualdad, veamos el lado derecho. Evalúe $\|\boldsymbol{u}\|$ y $\|\boldsymbol{v}\|$. Desarrolle y simplifique $2\|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{v}\|^2$.

....

....

Compare los dos resultados, esto comprobará dicha ley con un ejemplo particular.

....

9.5. Ejercicios propuestos

9.5.1. Dados los puntos $P(-1,2,3)$, $Q(3,4,-1)$ y $R(2,7,0)$, halle:

a. La distancia entre cada par de puntos.

b. El área del triángulo cuyos vértices son los puntos dados.

c. Los ángulos interiores del triángulo dado.

9.5.2. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = \langle -2,3,5\rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle 1,1,-3\rangle$ y $\boldsymbol{w} = \langle 6,-2,1\rangle$, halle:

a. $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$

b. $\boldsymbol{Proy_w}(\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v})$

c. $\|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})\|$, ¿qué interpretación geométrica tiene este resultado si los puntos iniciales de los tres vectores están en el origen $(0,0,0)$?

9.5.3. ¿El vector $\boldsymbol{v} = \langle -1,3,-6\rangle$ es combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{u} = \langle 1,2,1\rangle$, $\boldsymbol{w} = \langle 3,7,2\rangle$, $\boldsymbol{n} = \langle -4,-6,-6\rangle$?

9.5.4. Determine el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores adyacentes $\boldsymbol{u} = \langle 0,\frac{1}{2},1\rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle -2,4,\frac{3}{2}\rangle$, $\boldsymbol{w} = \langle -1,6,1\rangle$?

9.5.5. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = \langle 3,2,-4\rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle -1,5,4\rangle$, halle un vector w ortogonal a los dos vectores dados.

9.5.6. Determine el área del paralelogramo con lados adyacentes $\boldsymbol{u} = \langle 1,\frac{7}{2},-2\rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle 1,\frac{-4}{3},5\rangle$.

9.5.7. Dado el vector $\boldsymbol{u} = \langle 9,2,-3\rangle$, halle los cosenos y los ángulos directores del vector $\boldsymbol{u}$.

9.6. Preguntas de tipo Saber Pro

Antes de abordar estas preguntas usted debe tener claro el desarrollo teórico presentado en su clase magistral 7. Podría diseñar antes de empezar un mapa conceptual sobre vectores que incluya su definición, representación, las operaciones y las propiedades de estas. Un aspecto relevante es que reconozca las aplicaciones de los vectores y sus operaciones.

9.6.1. Preguntas de selección múltiple con única respuesta

1) Para el vector $\boldsymbol{u} = \langle -2, \boldsymbol{k} - 1, 2\rangle$ se sabe que ninguna de sus componentes es nula, que α, β y γ son sus ángulos directores con los ejes X, Y y Z, respectivamente, y que $\cos\gamma = \frac{2}{3}$, entonces se tiene que:
   A. $\cos\alpha = \frac{2}{3}$
   B. $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$
   C. $\cos\beta = \frac{5}{3}$
   D. $\cos\beta = -\frac{1}{3}$

2) El volumen del paralelepípedo con lados adyacentes $\overline{PQ}, \overline{PR}$, y $\overline{PS}$, con $P(1,1,1)$, $Q(2,0,3)$, $R(4,1,7)$ y $S(3,-1,-2)$ en unidades cúbicas es:
   A. 19
   B. 20
   C. 21
   D. 22

3) Dados $\boldsymbol{u} = \langle 3, -2\rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{k}, 2\rangle$, y $\boldsymbol{w} = \langle -\frac{1}{3}, \boldsymbol{m}\rangle$ entonces:
   A. Si $\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}$, u es ortogonal a w
   B. Si $k = -\frac{4}{3}$, u es ortogonal a v
   C. Si $\boldsymbol{m} = \frac{2}{9}$, u es paralelo a w
   D. Si $k = 3$, u es paralelo a v

4) Se tienen los vectores $\boldsymbol{u} = \langle 1, -2, 0\rangle$ y $\boldsymbol{v} = \langle 1, 3, -1\rangle$ entonces $Proy_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ es:
   A. $\langle -1, -3, 1\rangle$
   B. $\langle 1, -3, -1\rangle$
   C. $\langle -1, 2, 0\rangle$
   D. Nula, pues son ortogonales

5) El paralelepípedo que tiene un vértice en el origen y aristas $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ tiene volumen:
   A. 10 unidades cúbicas.
   B. 25 unidades cúbicas.
   C. 38 unidades cúbicas.
   D. 45 unidades cúbicas.

9.6.2. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

1) Si $\boldsymbol{u}=\langle \boldsymbol{k},1-\boldsymbol{k},2\rangle$ y $\boldsymbol{v}=\langle \boldsymbol{k}-1,2,1-\boldsymbol{k}\rangle$ y se sabe que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$, entonces los posibles valores de k son:
   1. $k=4$
   2. $k=-1$
   3. $k=1$
   4. $k=-4$

2) Se tiene que $\boldsymbol{u}=\langle 1,-2,-2\rangle$ y $\boldsymbol{v}=\langle 1,\beta,-1\rangle$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}rad$, entonces los posibles valores de β son:
   1. $\beta=\frac{3(-8+5\sqrt{2})}{7}$
   2. $\beta=\frac{3(-8-5\sqrt{2})}{7}$
   3. $\beta=\frac{3(8-5\sqrt{2})}{7}$
   4. $\beta=\frac{3(8+5\sqrt{2})}{7}$

3) En el triángulo ABC con $A(2,0,3)$, $B(3,1,0)$ y $C(5,2,2)$ se cumple que:
   1. Su área es 3
   2. La altura relativa a $\overrightarrow{AB}$ es 2,86
   3. El lado AC mide $\sqrt{14}$
   4. Su área es nula

4) Se tienen los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, Si $Proy_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}=Proy_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ se cumple que
   1. $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son paralelos
   2. $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son ortogonales
   3. $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$
   4. $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son paralelos y $\|\boldsymbol{u}\|^2\boldsymbol{u}=\|\boldsymbol{v}\|^2\boldsymbol{v}$

5) Para los vectores $\boldsymbol{u}=\langle 2,\beta,3\rangle$ y $\boldsymbol{v}=\langle 3\alpha,2,\beta\rangle$ se tiene que $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\langle \beta,3,-5\rangle$, entonces β y α son:
   1. $\beta=3$
   2. $\beta=2$
   3. $\alpha=1$
   4. $\alpha=-\frac{1}{9}$

6) Se tiene que $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{p}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$; las operaciones cuyo resultado es un escalar son:
   1. $\boldsymbol{u}\cdot[(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+\boldsymbol{p}]$
   2. $\boldsymbol{u}\times[(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})+\boldsymbol{p}]$
   3. $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{p})$
   4. $[\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w})]+[\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{p})]$

7) Se tiene que $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{p}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ las operaciones cuyo resultado es un vector son:
   1. $\boldsymbol{u}\cdot[(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+\boldsymbol{p}]$
   2. $\boldsymbol{u}\times[(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})+\boldsymbol{p}]$
   3. $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{p})$
   4. $[\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w})]+[\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{p})]$

8) Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{p}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ las operaciones que NO tienen sentido son:
   1. $\boldsymbol{u}\times[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})+\boldsymbol{p}]$
   2. $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}$
   3. $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w})\cdot[\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}]$
   4. $\boldsymbol{u}\times[(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})+\boldsymbol{p}]$

9) Se tienen los vectores $\boldsymbol{u}=\langle 1,4,\boldsymbol{k}\rangle$, $\boldsymbol{v}=\langle 2,-1,4\rangle$ y $\boldsymbol{w}=\langle 3,\boldsymbol{k},2\rangle$ y se sabe que el volumen determinado por los vectores es de 40 unidades cúbicas. Los valores de k deben ser:
   1. $k=-\frac{5}{2}$
   2. $k=-2$
   3. $k=2$
   4. $k=\frac{5}{2}$

9.7. Recursos informáticos recomendados

9.7.1. Recursos de cálculo online

1. Symbolab: En https://es.symbolab.com/solver/vector-calculator usted encontrará un apoyo para evaluar el producto punto, el producto cruz, el ángulo entre vectores, la proyección escalar y vectorial entre dos vectores. Claramente con la sintaxis adecuada usted puede evaluar el producto triple entre vectores.
2. Wolfram Alpha: Le permite en el link https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/linear-algebra/vectors/ realizar las operaciones de producto punto y cruz de dos vectores en diferentes representaciones. Una vez calculado, entrega una representación gráfica y datos sobre la operación.
3. OnlineMSchool: ofrece a través de su página http://es.onlinemschool.com/math/assistance/vector/ un amplio arsenal de operaciones entre vectores y el cálculo de sus aplicaciones más importantes. Entre otras, los cosenos directores de un vector, producto escalar de vectores, cálculo del ángulo entre vectores, proyección de un vector sobre otro vector, producto vectorial de vectores, producto mixto (llamado también producto triple), vectores colineales, vectores ortogonales, vectores coplanares, área de un triángulo construido sobre vectores, área del paralelogramo construido sobre vectores, volumen de la pirámide construida sobre vectores.

   Adicionalmente al final ofrece dos menús, uno de Intente resolver ejercicios con vectores en plano. y otro de Intente resolver ejercicios con vectores en espacio. donde usted puede practicar sobre los conceptos y procedimientos asociados a la resolución de ejercicios de este apartado.
4. Vitutor ofrece en el link https://www.vitutor.com/analitica/vectores/ejercicios_producto.html cinco ejercicios sobre el producto punto y cruz de vectores y sus aplicaciones. Intente resolverlos antes de pasar a las soluciones presentadas. Aunque son muy sencillos le pueden ser útiles para afianzar conceptos y procesos.

9.7.2. Algunos videos de apoyo

1. Operaciones con vectores (Producto punto y producto cruz) https://www.youtube.com/watch?v=wMIhlqNVabs (3:51)
2. Cosenos directores de un vector en el espacio https://www.youtube.com/watch?v=-ZPrOEtATCSs (6:08)
3. Volumen de un prisma con vectores https://www.youtube.com/watch?v=zOBrA9yHANY (7:46)
4. Proyección de un vector en el espacio sobre otro. https://www.youtube.com/watch?-v=050sGNckJ20 (5:42)
5. Producto vectorial triple - Interpretación geométrica https://www.youtube.com/watch?-v=fNaNLwbS0VI (5:32)
6. Vectores en el espacio - Producto cruz (Propiedades) https://www.youtube.com/watch?-v=MeLuqKl4Zx4 (6:53)

10 ECUACIÓN DE LA RECTA Y EL PLANO

10.1. Introducción

La ecuación común de la recta en el plano cartesiano, en $\mathbb{R}^2$, $y = mx + b$es ampliamente explorada, desde muchos puntos de vista en los cursos iniciales de matemáticas; por ello en el inicio de esta sección se usará este conocimiento previo para transitar entre las formas de representar la misma recta. A continuación, en esta sección se estudiarán las diferentes formas de expresar algebraicamente una recta en el espacio, es decir, en $\mathbb{R}^3$. Para ello se abordarán ejercicios teóricos en los que se presentan objetos iniciales con los que se tiene que determinar la ecuación de una recta. Posteriormente se abordarán ejercicios y situaciones problema relacionados con la ecuación escalar y la ecuación lineal de un plano. Con la consideración de que hay múltiples formas en las que los ejercicios o situaciones problema indagan por rectas en el espacio o por planos a través de diferentes objetos iniciales, se tratará de mostrar diversas situaciones abarcando muchas de estas posibilidades con la salvedad de que ante la amplitud de situaciones no se puede ser exhaustivo.

10.2. Objetivos de información

- Analizar ejercicios teóricos y situaciones problema que lleven a rectas en el espacio o planos.
- Identificar los objetos iniciales en los ejercicios para construir la ecuación de la recta o del plano pedidos.
- Explorar las diferentes ecuaciones para la misma recta.
- Encontrar la ecuación de un plano con diferentes objetos iniciales.

10.3. Ejemplos resueltos

10.3.1. **Primer ejemplo.** Teórico. Encuentre la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $P(1,-1)$ y $Q(-4,-3)$. Luego, encuentre las ecuaciones paramétricas y simétricas. Finalmente, halle la ecuación común y la ecuación general. ¿Cómo se relacionan?

Solución:
El vector director es $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle -4-1, -3+1\rangle = \langle -5,-2\rangle$, con lo que, la ecuación vectorial de la recta es $\langle x,y\rangle = \langle 1,-1\rangle + t\langle -5,-2\rangle$, $t \in \mathbb{R}$. Así, las ecuaciones paramétricas de la recta son $x = 1-5t$, $y = -1-2t$, $t \in \mathbb{R}$.
Igualando con ayuda del parámetro se tiene que las ecuaciones simétricas son $\frac{x-1}{-5} = \frac{y+1}{-2}$.
Ahora, con los puntos dados se encuentra $m = \frac{-3+1}{-4-1} = \frac{2}{5}$ y $b = -\frac{7}{5}$, con lo cual $y = \frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$. Esta ecuación común también se puede obtener desde las ecuaciones simétricas despejando y. La ecuación general de la recta que pasa por los puntos dados es $-2x+5y=-7$.

10.3.2. **Segundo ejemplo.** Aplicación. Encuentre las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $P(1,2,1)$ y $Q(3,1,-1)$.

Solución:
Los puntos P y Q pertenecen al espacio. El vector director $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 3-1, 1-2, -1-1\rangle = \langle 2,-1,-2\rangle$. La ecuación vectorial de la recta es $\langle x,y,z\rangle = \langle 1,2,1\rangle + t\langle 2,-1,-2\rangle, t \in \mathbb{R}$. Así, las ecuaciones paramétricas de la recta son $x = 1+2t$, $y = 2-t$, $z = 1-2t$, $t \in \mathbb{R}$. Así, las ecuaciones simétricas son $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$.

10.3.3. **Tercer ejemplo.** Mediante un proceso algebraico, determine: si las rectas son paralelas, oblicuas o se cortan. Si se cortan encuentre el punto de intersección y el ángulo de intersección.

$$L_1: x = t; y = -1 - t; z = 2 - 3t;$$
$$L_2: x = 2s; y = 1 - s; z = 2 + s$$

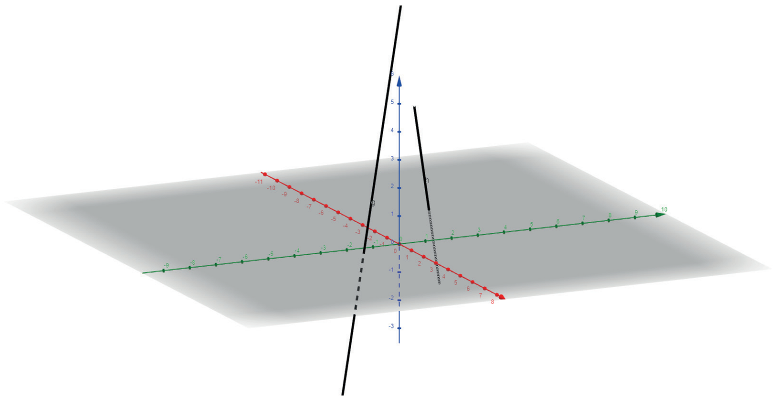
Solución:

Las rectas no son paralelas porque $\boldsymbol{v}_1 = \langle 1, -1, -3 \rangle$ y $\boldsymbol{v}_2 = \langle 2, -1, 1 \rangle$ con $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \langle -4, -7, 1 \rangle$.

Ahora, para saber si las rectas se cortan hay que resolver el sistema $\begin{cases} t = 2s \\ -1 - t = 1 - s \\ 2 - 3t = 2 + s \end{cases}$.

Al emplear la eliminación de Gauss-Jordan se encuentra que el sistema es inconsistente. De modo que las rectas ni son paralelas ni se cortan, es decir, son alabeadas u oblicuas. La Figura 20 muestra las dos rectas alabeadas. Al graficar, el *software* no las presenta como en la figura, hay que usar las herramientas de rotación para tener una imagen adecuada de las rectas. Con algunas de las rotaciones y la posición del observador pueden dar una visión equivocada y dar la impresión de que las rectas se cortan.

Figura 20. Rectas alabeadas.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

10.3.4. Cuarto ejemplo. Teórico. Encuentre una ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(1,2,-1)$, $P_2(0,1,0)$ y $P_3(-1,3,2)$.

Solución:

Este ejercicio se presenta como una oportunidad para reiterar la importancia de explorar diferentes técnicas para resolver los ejercicios. La técnica elegida debe corresponder a la eficiencia y al punto de aprendizaje en el que usted se encuentre. Es recomendable tener diferentes herramientas teóricas para abordar las situaciones de aplicación o modelación que se le presenten.

La primera técnica proviene del cálculo, en caso de requerir ampliación puede consultar Stewart (Stewart, 2012, pág. 821) o Grossman (Grossman, 1996, pág. 279). Para iniciar se conforman los vectores adyacentes: $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -1,-1,1\rangle$ y $\overrightarrow{P_1P_3} = \langle -2,1,3\rangle$. Como estos vectores son coplanares, su producto cruz $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \langle -4,1,-3\rangle$ es ortogonal al plano que los contiene. Así, la ecuación escalar del plano pedido es $-4(x-1)+1(y-2)-3(z+1)=0$ y la ecuación lineal es $-4x+y-3z=1$.

La segunda técnica viene del álgebra lineal, de esta puede encontrar explicación en Kolman (Kolman & Hill, 2013, pág. 215) o en (Anton, 1984, pág. 132). Como los puntos pertenecen al plano, cada uno de ellos debe satisfacer la ecuación lineal $ax+by+cz+d=0$,

$$\begin{cases} 1a+2b-c+d=0 \\ 0a+1b+0c+d=0 \\ -a+3b+2c+d=0 \end{cases}$$

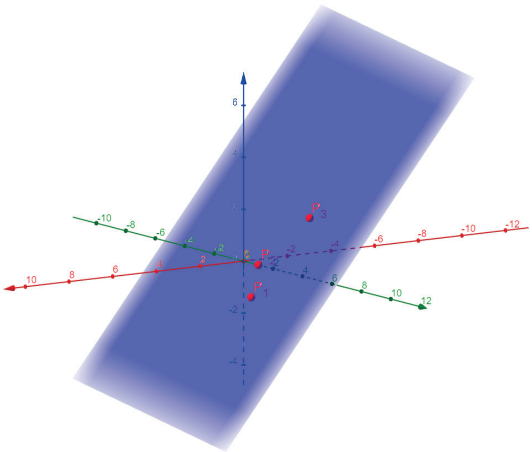
Al resolver el sistema se tiene una familia uniparamétrica de soluciones $a=4t$, $\mathrm{b}=-t$, $c=3t, d=t$ con $t\in\mathbb{R}$. Por tanto, con $t=-1$, la ecuación lineal del plano es $-4x+y-3z=1$.

La tercera técnica también es algebraica (Kolman & Hill, 2013, pág. 216). Esta técnica considera que la ecuación lineal del plano es $ax+by+cz+d=0$ y que lo que se debe encontrar son los parámetros del plano a, b, c y d; en ese orden de ideas, los puntos dados satisfacen la ecuación de modo que se tiene el sistema homogéneo:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Este sistema homogéneo tiene solución no nula cuando su determinante es igual a 0, es decir, $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Al calcular el determinante, con la definición generalizada, se encuentra que la ecuación lineal del plano es $-4x + y - 3z = 1$.

Figura 21. Plano que pasa por tres puntos dados.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0.

10.2.5. Quinto ejemplo. Aplicación. Determine la ecuación del plano que es perpendicular al plano $\pi_1 : x + y + z = 0$ y que contiene a la recta de intersección de $\pi_2 : x + 2y - z = 1$ y $\pi_3 : x - y - z = -1$.

Solución:

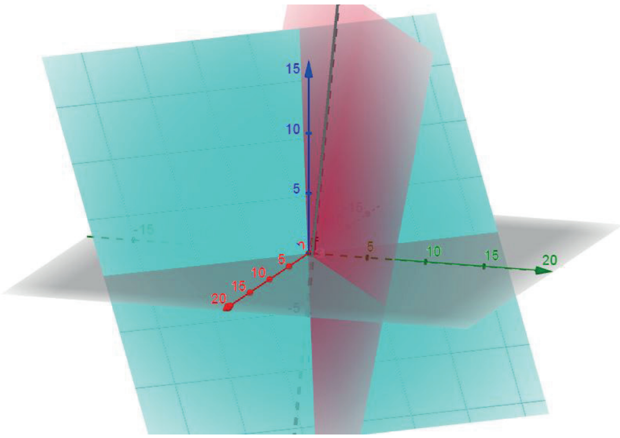
La intersección de los planos se encuentra al resolver el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$. La matriz aumentada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$ y la matriz escalonada reducida es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$. Las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos son $x = 1 - \frac{1}{3}t$, $y = \frac{2}{3}$, $z = t$ con $t \in \mathbb{R}$. El plano pedido debe contener dos puntos de la recta y por esto la contiene. Uno de los puntos puede encontrarse cuando $(1,\frac{2}{3},0)$ y otro cuando $t=3$, $(0,\frac{2}{3},3)$. Sustituyendo estos puntos en la ecuación lineal genérica del plano $ax+by+cz+d=0$, se producen dos ecuaciones $a+\frac{2}{3}b+d=0$ y $\frac{2}{3}b+3c+d=0$.

Por otra parte, que el plano pedido sea perpendicular a $x+y+z=0$ significa que los dos vectores normales son ortogonales, es decir, $\langle a,b,c\rangle\cdot\ \langle 1,1,1\rangle$ donde $\langle a,b,c\rangle$ es el vector normal del plano que hay que encontrar y $\langle 1,1,1\rangle$ es el vector normal de $x+y+z=0$. De este producto punto se obtiene una tercera ecuación $a+b+c=0$.

Se conformó el sistema $\begin{cases} a+\frac{2}{3}b+d=0 \\ \frac{2}{3}b+3c+d=0. \\ a+b+c=0 \end{cases}$, al resolverlo se obtienen infinitas soluciones cuya parametrización es $a=-9t, b=12t,\ c=-3t,\ d=t$ con $t\in\mathbb{R}$. Al hacer $t=1$ (para eliminar los denominadores) $a=-9, b=12,\ c=-3,\ d=1$.

Así las cosas, el plano es $-9x+12y-3z=-1$.

Figura 22. Plano que satisface las condiciones dadas.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

10.4. Ejercicios guiados

10.4.1. Primer ejemplo. Dados los puntos $P(5,-1,2)$ y $Q(3,7,-9)$, halle las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por estos puntos.

Para desarrollar este ejercicio, recuerde que debemos encontrar un vector que sea paralelo a esta recta; este tiene dos opciones, una podría ser el vector dirigido que va de P a Q, es decir, $\overrightarrow{PQ}$, o segunda, el vector dirigido que va de Q a P, es decir, $\overrightarrow{QP}$.

Suponga que tomamos la primera opción, esto es $\overrightarrow{PQ}$, ¿cuál es este vector?

....

....

Ahora, como ya se tiene el vector paralelo a dicha recta, utilice las fórmulas de esta sección para escribir las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por estos puntos, para ello es indiferente si remplaza por el punto P o Q, ya que ambos pertenecen a dicha recta; ¿cuál es su resultado final?

....

....

10.4.2. Segundo ejemplo. Dados los planos $\pi_1: 5x+3y-z=9$, y $\pi_2: x-7y+2z=1$, halle la intersección de dichos planos.

Para su desarrollo, plantee el sistema de ecuaciones lineales.

....

....

¿Qué observa antes de empezar su desarrollo? Analice cuántas ecuaciones tiene y cuántas incógnitas tiene.

....

....

¿Qué le dice lo anterior con respecto a la teoría de sistemas de ecuaciones lineales? Use lo estudiado en la parte inicial de este curso.

………

………

………

Resuelva el sistema utilizando el método de Gauss-Jordan.

………

………

………

Como ya pudo observar, este sistema tiene infinitas soluciones, por lo cual debe parametrizar y encontrar las ecuaciones paramétricas que corresponden a la recta de intersección de dichos planos.

………

………

10.4.3. Halle las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el punto $A(1,2,-3)$, y es paralela al plano $2x-y+5z=10$, y perpendicular a la recta $x=-2+t, y=3-2t, z=-1+4t$.

Para este tipo de ejercicios puede ayudarse de materiales o de software para representar los objetos iniciales que están en el enunciado.

En primera instancia necesitamos encontrar un vector que sea ortogonal a los vectores $\boldsymbol{n}=\langle 2,-1,5\rangle$ (vector normal del plano) y a $\boldsymbol{v}=\langle 1,-2,4\rangle$, (vector paralelo a la recta dada). Encuentre este vector.

………

………

El vector que usted encontró, ¿qué representa en la recta que usted debe hallar?

………

………

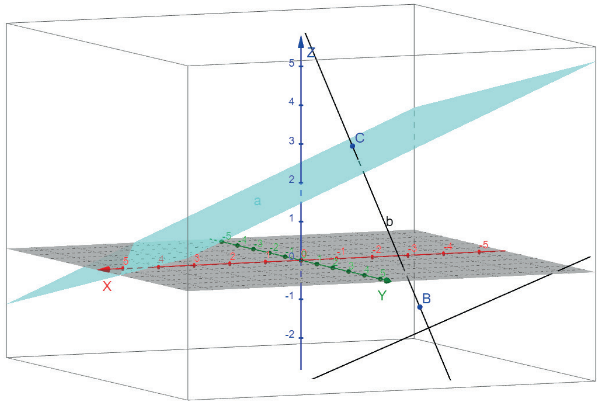
Para terminar el ejercicio halle las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto A.

………

………

Verifique que lo que encontró luce como la Figura 23 donde se observa que el plano es paralelo a la recta que pasa por A, y que además es perpendicular con la recta dada.

Figura 23. Gráfica de verificación del ejercicio.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

10.5. Ejercicios propuestos

10.5.1. Dados los puntos $P(-2, \frac{1}{3}, 5)$, $Q(2, 3, -1)$ y $R(0, \frac{3}{2}, 4)$, halle la ecuación del plano que contiene a estos tres puntos.

10.5.2. Dados los puntos $P(1, 3, 2)$ y $Q(4, -3, 6)$, halle las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por estos puntos.

10.5.3. Dados los planos $\pi_1: 5x + 3y - z = 9$, y $\pi_2: x - 7y + 2z = 1$, halle las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de estos planos y el ángulo formado por dichos planos.

10.5.4. Halle la distancia más corta entre el punto $P(-1, 3, -4)$, al plano $7x - y + 3z = 10$.

10.5.5. Dado el plano $\pi: -3x + 9y - \frac{3}{4}z = 7$, y el punto $P(5, \frac{1}{3}, -2)$, halle la ecuación del plano paralelo a π y que pasa por el punto P y la distancia entre estos dos planos.

10.5.6. Halle la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3,7,-5)$ y que es paralelo al plano $\pi: 6x+y=-9z+13$.

10.5.7. Halle las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el punto $A(1,2,-3)$ y es paralela al plano $2x-y+5z=10$, y perpendicular a la recta $x=-2+t, y=3-2t, z=-1+4t$. ¿Las dos rectas perpendiculares se intersecan? Si es así, halle el punto de corte.

10.5.8. Dada la recta L_1 que pasa por los puntos $P(2,3,4)$ y $Q(1,5,9)$, y el punto $R(1,1,5)$, halle:

a. Las ecuaciones simétricas de una recta L_2 paralela a L_1 que pasa por el punto R.

b. Las ecuaciones paramétricas de una recta L_3 perpendicular a L_1 que pasa por el punto R

10.5.9. Dado el plano π_1 que pasa por los puntos $A(1,-1,3)$, $B(4,0,-1)$ y $C(-2,5,1)$, y el punto $D(2,3,7)$, halle:

a. La ecuación del plano π_2 paralelo al plano π_1 que pase por el punto D.

b. La ecuación del plano π_3 perpendicular al plano π_1 que pase por el punto D.

10.5.10. Dado el punto $P(3,4,5)$, halle el volumen del paralelepípedo rectangular (ortoedro), ubicado en el primer octante, cuyas caras son planos paralelos a los planos xz, yz y al plano xy, respectivamente, que se encuentra en común al punto P.

10.5.11. Determine el valor de c, tal que los vectores $\boldsymbol{u}=\langle 0,c,1\rangle$ y $\boldsymbol{v}=\langle 0,5,-3\rangle$ sean paralelos.

10.5.12. Dado el punto $P(2,7,-1)$, halle:

a. La ecuación del plano que pase por el punto P y sea paralelo al plano xy.

b. La ecuación del plano que pase por el punto P y sea ortogonal al plano yz.

10.5.13. Halle la ecuación del plano que contiene la recta $\frac{x+5}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+6}{2}$ y que pasa por el punto $P(-2,6,-10)$.

10.5.14. Dada la recta $x=3-t,\ y=5+2t,\ z=-7+4t,\ t\in\mathbb{R}$, determine si los puntos $P(2,7,-3)$, $Q(0,11,-5)$, $R(4,3,-11)$ y $M(1,-9,1)$ pertenecen a la recta dada.

10.6. Preguntas de tipo Saber Pro

El sustento teórico presentado en su clase magistral 8 debe ser revisado antes de abordar esta sección. Resulta relevante tener claro qué elementos permiten definir una recta o un plano, y los conceptos sobre producto punto y producto cruz. Recuerde que existen diversos procedimientos para determinar ciertas propiedades o valores y que debe o bien ser muy fuerte en uno de ellos (si dispone de toda la información requerida) o practicar la solución de problemas con diferentes técnicas. Siempre resultará más eficiente un proceso de cálculo que requiera la menor cantidad de operaciones y procesos.

En este apartado se sugiere hacer uso del graficador tridimensional de Geogebra® para visualizar qué se está calculando, o qué se quiere determinar. Haga uso de la herramienta de rotación de la vista gráfica para tener una mejor idea de lo que realmente representan los objetos con los que se está tratando.

10.6.1. Preguntas de selección múltiple con única respuesta

1) Las rectas $L_2{:}\langle x,y,z\rangle=\langle 0,-2,-2\rangle+t\langle 1,2,3\rangle$ y $L_1{:}\frac{x-1}{2}=y=\frac{z-1}{4}$ se cortan formando un ángulo de:
   - A. $cos^{-1}\left(\frac{7\sqrt{6}}{16}\right)$
   - B. $sen^{-1}\left(\frac{7\sqrt{6}}{16}\right)$
   - C. $cos^{-1}\left(\frac{16}{7\sqrt{6}}\right)$
   - D. $cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

2) La distancia del punto $P(1,1,5)$ a la recta $x=1+t, y=3-t, z=2t$ es:
   - A. $\sqrt{5}$
   - B. $\sqrt{6}$
   - C. $3\sqrt{3}$
   - D. $\sqrt{30}$

3) El ángulo de intersección entre los planos $x+y=1$ y $2x+y-2z=2$ es:
   - A. $\frac{\pi}{6}$
   - B. $\frac{\pi}{4}$
   - C. $\frac{\pi}{3}$
   - D. $\frac{\pi}{2}$

4) El área del triángulo determinado por las rectas $\langle x,y,z\rangle=\langle 1,0,0\rangle+t\langle 0,0,2\rangle$, $x=-3+4t$, $y=3-3t$, $z=-1+3t$ y $\frac{x+3}{4}=\frac{3-y}{3}=z+1$ es:
   - A. 4
   - B. 5
   - C. 8
   - D. 10

5) La ecuación del plano que es paralelo a $2x+3y+4z=12$ y que pasa por $(1,-2,3)$ es:
   - A. $2x+3y+4z=-6$
   - B. $2x+3y+4z=0$
   - C. $2x+3y+4z=6$
   - D. $2x+3y+4z=8$

6) La recta que pasa por el punto $(1,0,6)$ y es perpendicular al plano $x+3y+z=5$ tiene por ecuación vectorial:
   - A. $r=\langle 1+t,3t,6+t\rangle$
   - B. $r=\langle t-1,-3t,6-t\rangle$
   - C. $r=\langle 1+t,3+t,t\rangle$
   - D. $r=\langle t-5,3t-5,6t-5\rangle$

10.6.2. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta.

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

1) La ecuación de la recta de intersección de los planos $\begin{cases} 3x-6y-2z=15 \\ 2x+y-2z=5 \end{cases}$ es:
   1. $x=3+14t, y=-1+2t, z=15t$
   2. $\frac{x+3}{14}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{15}$
   3. $\frac{x-3}{14}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{15}$
   4. $x=t, y=2t-3, z=-t+2$

2) La ecuación de la recta que pasa por $(-1,2)$ y $(-\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ está representada por:
   1. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix}=0$
   2. $y-2=7(x+1)$
   3. $\begin{cases} -a+2b+c=0 \\ -3a+b+4c=0 \end{cases}$
   4. $y=7x-5$

3) La ecuación de la recta que está determinada por los puntos $(1,-2,0)$ y $(-2,0,-1)$ es:
   1. $\langle x,y,z\rangle=\langle -3,-2,1\rangle+t\langle 1,-2,0\rangle$
   2. $\langle x,y,z\rangle=\langle 1,-2,0\rangle+t\langle -3,2,-1\rangle$
   3. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{2}=-z$
   4. $\frac{x+1}{3}=-\frac{y-1}{2}=z$

4) El plano determinado por los puntos $(1,1,-1)$, $(2,0,2)$,, y $(0,-2,1)$ está representado por:
   1. $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$
   2. $7x-5y-4z=6$
   3. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0$
   4. $\frac{x-1}{7}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+1}{4}$

5) 11) Para $\mathbb{R}^3$ es correcto afirmar que:
   1. Una recta y un punto determinan un plano.
   2. Una recta y un plano se cortan o son paralelos.
   3. Dos rectas se cortan o son paralelas.
   4. Dos planos se cortan o son paralelos.

6) Las proposiciones verdaderas en $\mathbb{R}^3$ son:
   1. Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas.
   2. Dos rectas perpendiculares a una tercera son perpendiculares.
   3. Dos planos paralelos a un tercero son paralelos.
   4. Dos planos perpendiculares a un tercero son paralelos.

7) Las condiciones bien establecidas en el espacio son:
   1. Dos rectas paralelas a un plano son paralelas.
   2. Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas.
   3. Dos planos paralelos a una recta son paralelos.
   4. Dos planos perpendiculares a una recta son paralelos.

10.7. Recursos informáticos recomendados

10.7.1. Recursos de cálculo online

1. OnlineMSchool: ofrece en su calculadora http://es.onlinemschool.com/math/assistance/cartesian_coordinate/p_to_line/ la posibilidad de determinar las ecuaciones paramétricas y simétricas de rectas tanto en dos como en tres dimensiones.

   En http://es.onlinemschool.com/math/assistance/cartesian_coordinate/plane/ se puede determinar la ecuación de un plano dado, o bien los tres puntos que lo determinan, o bien el vector normal al plano y un punto que se encuentra en el plano.

   El link http://es.onlinemschool.com/math/assistance/cartesian_coordinate/p_plane/ posibilita encontrar la distancia entre un punto y un plano, y http://es.onlinemschool.com/math/assistance/cartesian_coordinate/plane_plane/ permite evaluar la distancia entre dos planos paralelos y, de hecho, permite establecer si lo son o no, si no se verifica la condición de paralelismo advierte que los planos se entrecruzan.

   http://es.onlinemschool.com/math/assistance/cartesian_coordinate/p_line/ ofrece la posibilidad de evaluar la distancia entre un punto y una recta en el espacio. La entrada de la ecuación de la recta se puede dar en forma simétrica (llamada canónica) o paramétrica.

   Los vínculos http://es.onlinemschool.com/math/assistance/cartesian_coordinate/plane_angl/ y http://es.onlinemschool.com/math/assistance/cartesian_coordinate/plane_line/ permiten, respectivamente, determinar el ángulo entre dos planos y el ángulo entre una recta (dada su ecuación ya sea en forma paramétrica o simétrica) y un plano.

   Además en cada uno de los links se ofrece una pestaña adicional donde se presenta la teoría relacionada con cada uno de los temas.
2. Wolfram Alpha: Le permite mediante la entrada line through $(x_{1,}y_1,z_1)$and (x_2,y_2,z_2) encontrar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $(x_{1,}y_1,z_1)$ y (x_2,y_2,z_2), ofreciendo además en el mismo cálculo una representación gráfica (estática), la distancia entre los puntos y el punto medio del segmento determinado por los mismos. Con plane through $(x_{1,}y_1,z_1)$, (x_2,y_2,z_2), and $(x_{3,}y_2,z_3)$ permite evaluar la ecuación del plano determinado por los dos puntos, entrega además la representación visual del mismo (estática) y entrega el vector normal al plano.

3. El archivo en pdf que pone a disposición matemáticas online, en su link https://www.matematicasonline.es/cidead/libros/2Bach_Mat_II/apuntes/puntos_rectas_planos.pdf contiene una amplia batería de ejercicios que usted podría intentar reconstruir.

10.7.2. Algunos videos de apoyo

1. Intersección de dos planos y ángulo entre planos https://www.youtube.com/watch?v=6990yLiK-z8 (13:47)
2. Ecuación de la recta y el plano https://www.youtube.com/watch?v=NErQa3pFOJo (11:40)
3. Ecuación del plano dado tres puntos (Uso de determinantes) https://www.youtube.com/watch?v=xyD7-kPx6pg (7:53)
4. Ecuación de un plano dados tres puntos (Sistema de ecuaciones) https://www.youtube.com/watch?v=MIbfsTqkIeg (11:41)
5. Ecuación de un plano dados tres puntos (Vector normal - punto) https://www.youtube.com/watch?v=7cXx_T26gMQ (9:14)

11 ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES REALES

11.1. Introducción

Los espacios vectoriales son objetos matemáticos muy importantes en un curso introductorio de álgebra lineal y su estudio es ineludible dado que los objetivos específicos consisten en entender, aplicar e implementar las transformaciones lineales (TL). Las TL son funciones de un espacio vectorial en otro (con dos atributos especiales), por lo cual, en primera instancia debemos estudiar los aspectos básicos del espacio vectorial: su definición y algunas formas de argumentación en matemáticas que nos ayudan a la organización y sistematización del pensamiento. Si requiere fortalecer la fundamentación básica en los espacios vectoriales puede consultar los libros de Anton (Anton, 1984, págs. 137-147), Kolman & Hill (Kolman & Hill, 2013, págs. 227-237) y Grossman (Grossman, 1996, págs. 292-305). Para estudios más avanzados de los espacios vectoriales lo invitamos a consultar Hoffman & Kunze (Hoffman & Kunze, 1973), Lezama (Lezama, 2018).

Un espacio vectorial real V es un conjunto de objetos, llamados vectores dotados de dos operaciones binarias, una llamada suma $\oplus$ y otra multiplicación por escalar $\odot$ y que satisfacen los siguientes diez axiomas simultáneamente:

1. Ley interna (cerradura o clausurativa) de la suma: Si $\boldsymbol{u} \in V$, y $\boldsymbol{v} \in V$, entonces $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$.
2. Ley asociativa de la suma: Para todo $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V$, $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w})$
3. Ley modulativa (existencia del neutro) de la suma: Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{u} \oplus 0 = 0 \oplus \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
4. Ley del inverso de la suma: Si $\boldsymbol{u} \in V$, existe un vector $-\boldsymbol{u} \in V$ tal que $\boldsymbol{u} \oplus (-\boldsymbol{u}) = 0$
5. Ley conmutativa de la suma: Si $\boldsymbol{u} \in V$ y $\boldsymbol{v} \in V$, entonces $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$
6. Ley interna (cerradura o clausurativa) de la multiplicación: Si $\boldsymbol{u} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $$\alpha \oplus \boldsymbol{u} \in V.$$

7. Primera Ley distributiva: Si $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{v} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha \odot (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = (\alpha \oplus \boldsymbol{u}) \oplus (\alpha \oplus \boldsymbol{v})$
   Segunda Ley distributiva: Si $\boldsymbol{u} \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $(\alpha + \beta) \odot \boldsymbol{u} = (\alpha \odot \boldsymbol{u}) \oplus (\beta \odot \boldsymbol{u})$
   Ley asociativa de la multiplicación por escalar: Si $\boldsymbol{u} \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces
   $$(\alpha\beta) \odot \boldsymbol{u} = \alpha \odot (\beta \odot \boldsymbol{u})$$
8. Ley modulativa de la multiplicación por escalar: Para todo $\boldsymbol{u} \in V$, $1 \odot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
   La 4-upla $(\boldsymbol{V}, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial si satisface los diez axiomas mencionados.

11.2. Objetivos de información

- Analizar los axiomas para definir un espacio vectorial.
- Extender la definición de vector al concepto de vector en el álgebra lineal.
- Estudiar la definición y las caracterizaciones de subespacio vectorial.
- Argumentar desde la matemática la decisión de si una 4-upla es espacio vectorial o no.
- Usar los diferentes tipos de razonamiento para decidir si un objeto es o no un subespacio vectorial.

11.3. Ejemplos resueltos

11.3.1. Primer ejemplo. Teórico. El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que se encuentran en una recta que no pasa por el origen no es un espacio vectorial con las operaciones usuales.

Solución:

Para argumentar que una 4-upla $(\boldsymbol{V}, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ no es un espacio vectorial es suficiente con identificar un axioma que no se satisface. No hay necesidad de listar todos los axiomas que incumple. En este caso note que la forma general del conjunto de puntos es $V = \{(x,y) \colon y = mx + b, \text{con } b \neq 0\}$ y las operaciones son las usuales.

No se satisface la ley clausurativa porque al sumar dos puntos del conjunto, el punto resultante no hace parte del conjunto. Es decir, $(x_1, mx_1 + b) + (x_2, mx_2 + b) = (x_1 + x_2, m(x_1 + x_2) + 2b)$ y este punto ya no hace parte de V.

Cuando se sustituye $x = x_1 + x_2$ en $y = mx + b$ se encuentra $y = m(x_1 + x_2) + b$. El punto con primera componente $x_1 + x_2$ es $(x_1 + x_2, m(x_1 + x_2) + b)$.

Para una visualización de lo escrito, considere $V = \{(x,y) : y = 3x - 1\}$. Dos puntos del conjunto son $(0,-1)$ y $(1,2)$, cuando se hace la suma $(0,-1)+(1,2)=(1,1)$. No obstante, al evaluar $x = 1$ en la ecuación de la recta se obtiene $y = 2$, y por esto $(1,1) \notin V$.

11.3.2. Segundo ejemplo. Teórico. Para V en $\mathbb{R}^2$ se definen las operaciones suma y multiplicación por escalar como $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix}$ y $\alpha \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x+1)-1 \\ \alpha(y+1)-1 \end{pmatrix}$. ¿$(V, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial?

Solución:

Con ánimo netamente ilustrativo se hace la verificación de cada axioma en extenso:

1. Sean $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}$, entonces $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}$. Sea $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ esta por definición de la operación.
2. $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{a}$, entonces $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_1 + 1 \\ y_2 + y_1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{a}$
3. $(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \oplus (\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c})$ con $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$

   $(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus \boldsymbol{c} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \oplus \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 + x_3 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 \end{pmatrix}$

   Así, $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 + x_3 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 + x_3 + 1) + 1 \\ y_1 + (y_2 + y_3 + 1) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 + x_3 + 1 \\ y_2 + y_3 + 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} \oplus (\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c})$.
4. Existe $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{V}$ tal que $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \oplus \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$. Se determina el elemento neutro sea $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$, entonces $\begin{pmatrix} x_1 + s + 1 \\ y_1 + t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ igualando componentes $x_1 + s + 1 = x_1$ o $s + 1 = \boldsymbol{0}$, así $s = -1$ y análogamente $t = -1$. Por tanto, $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{V}$.

5. Para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ existe $-\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{x} \oplus (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Sea el elemento inverso $-\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ y como en el axioma anterior se tiene que $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p + 1 \\ y_1 + q + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ igualando componentes $x_1 + p + 1 = -1$, así $p = -x_1 - 2$ y análogamente $q = -x_2 - 2$. Por tanto, $-\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_1 - 2 \\ -x_2 - 2 \end{pmatrix}$ y $-\boldsymbol{x} \in V$.

6. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ entonces $\alpha \odot \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, $\alpha \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x+1) - 1 \\ \alpha(y+1) - 1 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{V}$ (definición).

7. $\alpha \odot (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) = (\alpha \oplus \boldsymbol{a}) \oplus (\alpha \oplus \boldsymbol{b})$. Entonces,

$$\alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + x_2 + 1 + 1) - 1 \\ \alpha(y_1 + y_2 + 1 + 1) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + 1) - 1 \\ \alpha(y + 1) - 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \alpha(x_2 + 1) - 1 \\ \alpha(y + 1) - 1 \end{pmatrix} = (\alpha \odot \boldsymbol{a}) \oplus (\alpha \odot \boldsymbol{b})$$

8. $(\alpha \oplus \beta) \odot (\boldsymbol{v}) = (\alpha \odot \boldsymbol{v}) \oplus (\beta \odot \boldsymbol{v})$, tenemos

$$(\alpha \oplus \beta) \odot (\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)(x+1) - 1 \\ (\alpha + \beta)(y+1) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha - 1 + \beta x + \beta - 1 + 1 \\ \alpha y + \alpha - 1 + \beta y + \beta - 1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [\alpha(x+1) - 1] + [\beta(x+1) - 1] \\ [\alpha(y+1) - 1] + [\beta(y+1) - 1] \end{pmatrix} = (\alpha \odot \boldsymbol{v}) \oplus (\beta \odot \boldsymbol{v})$$

9. $\alpha\beta) \odot \boldsymbol{v} = \alpha \odot (\beta \odot \boldsymbol{v})$ desarrollando el lado derecho de la igualdad se tiene:

$$\alpha \odot \begin{pmatrix} \beta(x+1) - 1 \\ \beta(y+1) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha[\beta(x+1) - 1 + 1] - 1 \\ \alpha[\beta(y+1) - 1 + 1] - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha[\beta(x+1)] - 1 \\ \alpha[\beta(y+1)] - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta\,(x+1) - 1 \\ \alpha\beta\,(y+1) - 1 \end{pmatrix} = (\alpha\beta) \odot \boldsymbol{v}$$

10. $1 \odot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. Se tiene que: $1 \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(x+1) - 1 \\ 1(y+1) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 - 1 \\ y + 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Al cumplir los diez axiomas, entonces se concluye que $(V, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial real.

11.3.3. Tercer ejemplo. A continuación listamos algunos de los espacios vectoriales más comunes:

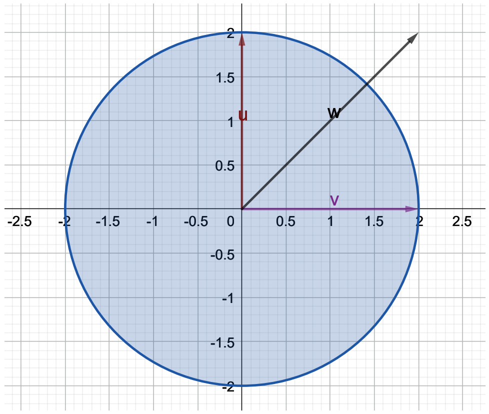
- Espacio vectorial trivial $V = \{\mathbf{0}\}$ con las operaciones usuales (ordinarias), $(\{0\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real.
- El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ de una recta que pasa por el origen, $V = \{(x,y): y = mx\}$ con las operaciones usuales es un espacio vectorial.
- El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran en un plano que pasa por el origen es un espacio vectorial. Es decir, $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial donde $V = \{(x,y,z): ax + by + cz = 0\}$
- Definiendo $P_n = \{p(x): p(x) \text{ es un polinomio de grado igual a } n\}$ dotado con las operaciones usuales, $(P_n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.
- $(C[0,1], \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial, donde $C[0,1] = \{f: f$ es una función continua en $[0,1]$ a valor real$\}$ y las operaciones de suma y multiplicación por escalar son las usuales en las funciones.
- $(M_{m\times n}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial considerando $M_{m\times n}(\mathbb{R}) = A{:}A$ es una matriz de orden $m\times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ y las operaciones son las usuales para matrices.

11.3.4. Cuarto ejemplo. Teórico. En $\mathbb{R}^2$, determine si el conjunto de vectores $W = \{\langle x,y\rangle: x^2 + y^2 \leq 4\}$ con las operaciones usuales es un subespacio vectorial.

Solución:

Para iniciar la solución debemos visualizar el conjunto W como un conjunto de vectores cuyo punto inicial está en el origen y el punto final está en la frontera o en el interior de este círculo con centro en $(0,0)$ y radio 2. W con las operaciones usuales no puede ser un subespacio de $\mathbb{R}^2$ porque no satisface la cerradura para la suma de vectores. Con $\boldsymbol{u} = \langle 0,2\rangle$ y $\boldsymbol{v} = \langle 2,0\rangle \in W$, y se observa que $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \notin W$. El punto final de w no está ni en la frontera ni en el interior del círculo, como se ve en la Figura 24.

Figura 24. Círculo con centro en el origen y radio 2.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

11.3.5. Quinto ejemplo. Teórico. Determine si W definido como el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2 con término independiente igual a cero es un subespacio vectorial de P_2.

Solución:

Se verificarán las dos cerraduras: la de la suma y la de la multiplicación por escalar. Para la cerradura de la suma hay que considerar dos polinomios diferentes, sean

$$p_1(t)=a_2t^2+a_1t+a_0 \text{ y } p_2(t)=b_2t^2+b_1t+b_0$$

dos polinomios en W. Eso implica que los términos independientes son 0, así, $a_0=0$ y $b_0=0$. De modo que al sumar entrada por entrada se obtiene:

$$p_1(t)+p_2(t)=a_2t^2+a_1t+bt^2+b_1t=a_2+b_2)t^2+(a_1+b_1)t$$

El término independiente $p_1(t)+p_2(t)$ es 0, que es la condición para estar en W. Así, W es cerrado bajo la suma. Ahora, para la cerradura bajo la multiplicación por escalar, tome el polinomio $p(t)=a_2t^2+a_1t+a_0$ que pertenece a W, es decir, $a_0=0$. También considere α un escalar. Al efectuar la multiplicación entrada por entrada se obtiene:

$$\alpha p(t)=\alpha(a_2t^2+a_1t+a_0)=\alpha a_2t^2+\alpha a_1t+\alpha a_0=\alpha a_2t^2+\alpha a_1$$

Como el término independiente es $\alpha a_0=0$, $\alpha p(t)\in W$ verificando la cerradura bajo la multiplicación por escalar. En conclusión, W es un subespacio vectorial de P_2.

11.3.6. Sexto ejemplo. Teórico. Determine si $W = \left\{ A : A = \begin{pmatrix} a^2 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ con las operaciones usuales para $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial real.

Solución:

W así definido no puede ser un subespacio de V porque no satisface la cerradura para la suma. Considere las matrices $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ que pertenecen a W, su suma es $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$. Pero $\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} \notin W$ porque $a = 5$ implica $a^2 = 25$.

11.4. Ejercicios guiados

11.4.1. Primer ejemplo. Determine si el conjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx, x \geq 0\}$, es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Recuerde que para subespacio solo necesitamos verificar la cerradura para la suma y cerradura para el producto. (Tenga en cuenta que para algunos ejercicios de estos es suficiente hacer un pequeño análisis y determinar si el elemento **0** pertenece al conjunto, en caso de no estar aquí ya podría concluir que no es subespacio. Otra opción de solución es la búsqueda de un contraejemplo, es decir, un caso particular que no satisface las condiciones para estar en el conjunto).

Tome los elementos $\boldsymbol{v}_1 = (x_1, y_1) \in V$, y $\boldsymbol{v}_2 = (x_2, y_2) \in V$, ¿Cómo interpreta el hecho de que estos dos puntos pertenezcan al conjunto V? (Hay que describir la hipótesis, es decir, el supuesto).

....

....

....

¿Qué debería ocurrir para que $v_1 + v_2 \in V$? (esto hace referencia a su tesis, es decir, a lo que debe llegar a través de su hipótesis). Calcule $v_1 + v_2$. ¿$v_1 + v_2$ satisface la condición para estar en el conjunto?

....

....

....

Ahora, inicie con su hipótesis y a partir de ella haga operaciones intentando llegar a su tesis.

....

....

....

¿El conjunto V es cerrado para la suma?

....

....

....

Ahora, si la respuesta anterior fue negativa ya podría afirmar que el conjunto dado no es subespacio vectorial y ahí terminaría el ejercicio. En caso contrario, debe pasar a comprobar la cerradura para el producto. Para la cerradura del producto, tome un escalar $k \in \mathbb{R}$, y un elemento $\boldsymbol{v} = (x, y) \in V$, al igual que se hizo para la cerradura de la suma ¿Qué le indica que $\boldsymbol{v} = (x, y) \in V$? (esto se considerará como hipótesis).

....

....

....

Se desea probar que $k\boldsymbol{v} \in V$, siendo $k \in \mathbb{R}$ y el elemento $\boldsymbol{v} \in V$, ¿qué obtiene al efectuar la operación $k\boldsymbol{v}$?

....

....

....

¿Cómo debe ser kv para que pertenezca a V? (esta será la tesis).

....

....

Al igual que se hizo para la cerradura de la suma, inicie con la hipótesis y determine si puede llegar a la tesis.

....
....
....

¿Cuál es su conclusión? ¿V es o no subespacio vectorial del espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?

....
....
....

11.4.2. Segundo ejemplo. Demuestre que las matrices simétricas de tamaño 3×3 son un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices 3×3.

Para empezar este ejercicio, ¿qué quiere decir que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, sea simétrica?

....
....
....

Al tener claro qué significa la matriz simétrica de tamaño 3×3, para definir el conjunto W, complete los espacios vacíos: $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : b = \quad , c = \quad , f = \quad \right\}$.

Como ya se tiene claro el conjunto W, vamos a repetir el proceso del ejercicio guiado anterior, esto es:

Cerradura para la suma: Tome los elementos $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} \in W$, y $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{pmatrix} \in W$, calcule $A + B$:

....
....
....

¿Qué significa que A y B pertenezcan a W? (reinterprete su hipótesis). ¿Qué indica que $A+B$ pertenezca a W? (esto explica la tesis, es decir, a lo que debe llegar a través de la hipótesis).

....

....

....

Ahora inicie con su hipótesis y a través de esta, haciendo operaciones con las matrices, determine si puede llegar a su tesis.

....

....

¿El conjunto W es cerrado para la suma?

....

....

Ahora, si es cerrado para la suma, continúe con este paso; en caso contrario ya podría afirmar que el conjunto dado no es subespacio vectorial (lo cual sería contradictorio, dada la pregunta de este ejercicio).

....

....

....

Para la cerradura del producto, tome un escalar $k \in \mathbb{R}$, y un elemento $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in W$,

¿Qué le indica que $A \in W$? (esto se considerará como hipótesis).

....

....

....

Recuerde que se desea probar que para el escalar $k \in \mathbb{R}$ y el elemento $A \in W$, $kA \in W$, ¿Qué obtiene al realizar la operación kA?

....

....

....

¿Qué debería ocurrir si $kA \in W$? (esta será la tesis).

....

....

....

Al igual que se hizo para la cerradura de la suma, inicie con la hipótesis y determine si puede llegar a la tesis.

....

....

....

¿Cuál es su conclusión?

....

....

....

11.4.3. Tercer ejemplo. Sea W el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^2$ cuya cola es (0,0) y cuya cabeza es (x,y), donde (x,y) satisface $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. Determine si W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Para tener una imagen mental del conjunto, empiece por hacer un gráfico en el plano xy. ¿Qué ocurre si toma dos vectores dirigidos (ojalá con cabeza en las esquinas del cuadrado)?

....

....

....

Tome estos vectores y súmelos para ver la cerradura de la suma y verifique que lo que intuye del paso anterior es cierto.

....

....

....

¿Cuál es su conclusión acerca del conjunto W?

....

....

11.5. Ejercicios propuestos

11.5.1. Demuestre que $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=cx^2\}$ es un espacio vectorial.

11.5.2. Determine si el conjunto $W=\{ax^2+bx+c\in P_2 : a=c\}$ es un subespacio vectorial de P_2.

11.5.3. Determine si el conjunto $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f\end{pmatrix}\in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : a=0,\ f=0,\ b+c=d\right\}$ es un subespacio vectorial de $M_{2\times 3}$.

11.5.4. Demuestre si $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

11.5.5. Demuestre si $W=\{\langle x,y,z\rangle\in\mathbb{R}^3 : z=2x+2y+1\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

11.5.6. Determine si el conjunto $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=mx, y\geq 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

11.5.7. Determine si $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=mx+3\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

11.5.8. Determine si $W=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\sqrt{x}\right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

11.5.9. Determine si $W=\left\{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & 4\end{pmatrix}\right\}$ es un subespacio vectorial.

11.5.10. Determine si el conjunto $W=\{at^3+bt^2+ct+d\in P_3 : a=b, c=-d\}$ es un subespacio vectorial de P_3.

11.6. Preguntas de tipo Saber Pro

Este apartado, como usted ya habrá podido evidenciar, puede resultar bastante novedoso desde lo que usted había manejado. Los elementos vectores ya pueden ser cualquier objeto y no simplemente los segmentos dirigidos (podrían ser matrices, conjuntos de puntos, polinomios, funciones, etc.), las operaciones de "suma" y "multiplicación por un escalar" pueden ser nuevas (en la medida en que podrían no ser las usuales y estar definidas de una manera no convencional) y los elementos nulo e identidad también pueden, y suelen, ser no convencionales (es decir, no son el "cero" y "uno" usuales).

Así las cosas, es importante que antes de abordar este conjunto de preguntas usted revise los referentes teóricos presentados en la clase magistral 9, reconstruya y solucione los ejercicios y ejemplos presentados de una manera analítica.

11.6.1. Preguntas de selección múltiple con única respuesta.

1) Sea $V = M_{3\times 2}(Z)$, y $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, y la suma y producto por un escalar definida de la manera usual, entonces V no es un espacio vectorial porque:
   - A. $x + y \notin V$
   - B. $x + 0_{3\times 2} \neq 0_{3\times 2} + x$
   - C. $\alpha x \notin V$ para toda α
   - D. $x + (y + z) \neq (x + y) + z$

2) En $\mathbb{R}^2$ con la suma definida por $\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1\rangle$, y la multiplicación por un escalar de la manera usual, el elemento nulo (módulo) de la suma será:
   - A. $\langle 0,0\rangle$
   - B. $\langle 1,1\rangle$
   - C. $\langle -1,1\rangle$
   - D. $\langle -1,-1\rangle$

3) En $\mathbb{R}^2$ con la suma definida por $\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1\rangle$, y la multiplicación por un escalar de la manera usual, el elemento inverso será:
   - A. $\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1\rangle$
   - B. $\langle -x_1 - x_2 - 1, -y_1 - y_2 - 1\rangle$
   - C. $\langle -x_1 - 2, -y_1 - 2\rangle$
   - D. $\langle -x_1 + 2, -y_1 + 2\rangle$

4) Si V es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, con las operaciones definidas como:
   $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix}$ y $\alpha \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$ se tiene que V no es un subespacio vectorial, pues:
   - A. No existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} \oplus \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \oplus \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ para todo $\boldsymbol{u} \in V$
   - B. No existe $-\boldsymbol{u} \in V$ tal que $-\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ para $\boldsymbol{u} \in V$
   - C. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha + \beta) \odot \boldsymbol{u} \neq \alpha \odot \boldsymbol{u} + \beta \odot \boldsymbol{u}$
   - D. Si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ entonces $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$

11.6.2. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

5) Si se tiene el espacio $\mathbb{R}^3$, entonces un subespacio de $\mathbb{R}^3$ es:
   1. $T=\{(x,y,z): ax+by+cz=d, \text{con } a,b,c,d\in\mathbb{R}\wedge d\neq 0\}$
   2. $V=\{\langle a,b,c\rangle: a,b,c\in\mathbb{R}\wedge a=b=c\}$
   3. $W=\{\langle 0,x,y\rangle: x,y\in\mathbb{R}\}$
   4. $R=\{(x,y): x<y\}$

6) Son subespacios de $\mathbb{R}^2$ sobre el conjunto de los reales:
   1. $P=\{(x,y): x<y\}$
   2. $Q=\{(x,y): x=y\}$
   3. $R=\{(x,y): x+4y=0\}$
   4. $S=\{(x,y): x=y-1\}$

7) Si $Z=\{p(x)=a_0+a_1x+a_0x^2+a_1x^3: a_0,a_1\in\mathbb{R}\}$ y $W=\{q(x)=b_0+b_1x+b_1x^2: b_0,b_1\in\mathbb{R}\}$, entonces:
   1. Z es un subespacio de P_3
   2. W es subespacio de P_3 solo si $b_1=0$
   3. W es subespacio de P_3
   4. Z no es un subespacio de P_3

8) Sea $B=\left\{A: A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}, a,b,c,d\in\mathbb{R}\wedge a+d=0\right\}$ y $W=\left\{A: A=\begin{pmatrix} 0 & -a\\ a & 0\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}\right\}$ entonces
   1. W es un subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
   2. B es un subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
   3. B es subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ solo para los escalares $\alpha\geq 0$
   4. W no es un subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

9) Si $S=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4: x-z=0, 2x+y=0\}$, y $R=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4: -x+y+2z=0, -3x+2w=0\}$ se tiene que:
   1. S es un subespacio de $\mathbb{R}^4$
   2. R es subespacio de $\mathbb{R}^4$ solo para los escalares $\alpha\geq 1$
   3. R es un subespacio de $\mathbb{R}^4$
   4. S no es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

10) Los subconjuntos que son subespacios vectoriales H de los espacios dados V son:
   1. $V=\mathbb{R}^3, H=\{(x,y,z): y=2x+1\}$
   2. $V=M_{2\times 3}(\mathbb{R}), H=\left\{A: A=\begin{pmatrix} 0 & n+2 & 0\\ n & 0 & m\end{pmatrix}\right\}$
   3. $V=M_{2\times 2}(\mathbb{R}), H=\left\{A: A=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ a & b\end{pmatrix} \text{con } a,b\in\mathbb{R}\right\}$
   4. $V=P_2, H=\{a_2t^2+a_1t+a_0 \text{ con } a_0=0\}$

11.7. Recursos informáticos recomendados

11.7.1. Recursos de cálculo online

Dado que los elementos desarrollados en este apartado tienen un alto contenido teórico y el ser o no espacio vectorial, así como el ser subespacio o no, depende no solo del conjunto (o subconjunto) definido, sino además de la forma en que se definan la operación suma y el producto por un escalar, no existen calculadoras o programas online que permitan verificar si un conjunto o subconjunto satisface las propiedades requeridas. Más adelante se pondrán unas ciertas propiedades, pero asumiendo que se trata de un espacio vectorial o que hay una definición bien determinada de las operaciones.

11.7.2. Algunos videos de apoyo

1. Axiomas de espacio vectorial https://youtu.be/DDnv9WczmZU (4:57)
2. Subespacio nulo https://www.youtube.com/watch?v=SH93i9-duUo (12:45)
3. Elementos nulo y opuesto de una operación (Espacios vectoriales) https://www.youtube.com/watch?v=hKsrznGLv4I (4:58)
4. Subespacios vectoriales (No ejemplo) https://www.youtube.com/watch?v=SnJmY6SF754 (4:29)
5. Subespacio vectorial (Ejemplo 1) https://youtu.be/Bbq1unu0ljY (5:08)
6. Espacio vectorial real - operaciones no usuales (Parte 1) https://www.youtube.com/watch?v=oGE_3PGgI_o (11:40)
7. Espacio vectorial real - operaciones no usuales (Parte 2) https://www.youtube.com/watch?v=CcPTQyPwdxQ (11:03)
8. Espacio vectorial real - operaciones usuales (Parte 1) https://www.youtube.com/watch?v=uBJsvf1ZNPE&t=3s (11:25)
9. Espacio vectorial real - operaciones usuales (Parte 2) https://www.youtube.com/watch?v=wpEIGePyfmU (10:22)
10. Espacio vectorial real (Definición y axiomas) https://www.youtube.com/watch?v=Om_LU-qHTVA (12:22)

12 SEGUNDA AUTOEVALUACIÓN

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON MÚLTIPLE RESPUESTA

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

1) Para $\boldsymbol{u} = \langle -2,1,3 \rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle 0,-1,-3 \rangle$ y $\boldsymbol{w} = \langle 1,0,2 \rangle$, es cierto que:
   - A. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = 4$
   - B. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = 6$
   - C. $proy_v \boldsymbol{w} = \langle 0, \frac{3}{5}, \frac{9}{5} \rangle$.
   - D. $2\boldsymbol{w} \times (-2\boldsymbol{v}) = \langle 2,-6,-4 \rangle$

2) Los subconjuntos que son subespacios vectoriales H, de los espacios dados V son:
   - A. $V = \mathbb{R}^3, H = \{(x,y,z): 2x + y + z = 0\}$
   - B. $V = P_2, H = \{a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \text{ con } a_0 = 0\}$
   - C. $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R}), H = \left\{ A : A = \begin{pmatrix} a+4 & a & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} \text{con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$
   - D. $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R}), H = \left\{ A : A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 6 \end{pmatrix} \text{con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$

3) El triángulo con vértices $(1,2,3)$,$(4,1,3)$ y $(4,6,4)$ satisface que:
   - A. Es un triángulo rectángulo.
   - B. Es un triángulo isósceles
   - C. Tiene como perímetro 14.17 unidades lineales.
   - D. Tiene área de 7.66 unidades cuadradas.

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON ÚNICA RESPUESTA

4) El punto en el que la recta $x = 2 + 3t, y = -4t, z = 5 + t, t \in \mathbb{R}$ corta al plano $4x + 5y - 2z = 18$ es:
   - A. $(3,2,2)$
   - B. $(-4,-2,-16)$
   - C. $(2,0,5)$
   - D. $(-4,8,3)$

5) El ángulo entre los planos $x + z = 1$ y $y + z = 1$ es
   - A. $\frac{\pi}{2}$
   - B. $\frac{\pi}{3}$
   - C. $\frac{\pi}{4}$
   - D. $\frac{\pi}{6}$

6) Sean P y Q dos puntos en $\mathbb{R}^3$, se llama plano medio al plano que contiene el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ y que a su vez es perpendicular a $\overline{PQ}$. La ecuación del plano medio determinado por los puntos $P(1,1,3)$ y $Q(-1,2,4)$ es:

A. $x + y + 3z = 14$

B. $-x + 2y + 4z = 14$

C. $-2x + y + z = 5$

D. $x + 2y + 4z = 6$

TABLA DE RESPUESTAS

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					

PREGUNTAS ABIERTAS

7) Halle el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$, donde $P(0,0,1)$ $Q(1,1,2)$, $R(-3,0,-1)$ y $S(3,2,-1)$.

8) Determine si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, se cortan o son oblicuas. Si se cortan encuentre el punto y el ángulo de intersección.

$L_1 = \langle 3,2,-4\rangle + t\langle 1,1,-3\rangle; t \in \mathbb{R}$

$L_2 = \langle -1,0,1\rangle + s\langle 1,4,-2\rangle; s \in \mathbb{R}$

13 CONJUNTO GENERADOR, ENVOLVENTE LINEAL E INDEPENDENCIA LINEAL

13.1. Introducción

Después de estudiar los espacios y los subespacios vectoriales debemos emprender el estudio de conjuntos especiales que permiten representar como combinación lineal a cualquier vector del espacio sin emplear muchos vectores. Estos conjuntos se denominan bases de un espacio vectorial o de un subespacio vectorial. En nuestro curso, la utilidad de las bases recae en que mediante ellas podemos verificar propiedades del espacio completo. Para llegar a las bases se requieren dos conceptos como prerrequisitos: uno de ellos es el conjunto generador y el otro es el de independencia lineal. Estos dos conceptos se abordarán en esta sección.

13.2. Objetivos de información

- Distinguir las diferencias entre los conceptos que están ligados a la combinación lineal de vectores.
- Decidir cuándo un conjunto genera un espacio vectorial.
- Caracterizar geométricamente las envolventes lineales de subconjuntos en $\mathbb{R}^3$ compuestos por un vector o dos vectores.
- Favorecer la implementación de los teoremas de caracterización de independencia lineal en vez de la definición.
- Implementar el wronskiano como técnica para determinar la independencia lineal (LI) en el espacio $C(-\infty,\infty)$.

13.3 Ejemplos resueltos

13.3.1. Primer ejemplo. Teórico. ¿Es $t-1$ una combinación lineal de $t+3$ y $-2t+4$?

Solución:

La pregunta debe reescribirse para tener un punto de inicio para el cálculo, así que debemos encontrar escalares α_1 y α_2 tales que $\alpha_1(t+3)+\alpha_2(-2t+4)=t-1$.

Conforme a las operaciones entre polinomios, se tiene que $(\alpha_1-2\alpha_2)t+(3\alpha_1+4\alpha_2)=t-1$.

Comparando entrada por entrada se obtiene $\begin{cases} \alpha_1-2\alpha_2=1 \\ 3\alpha_1+4\alpha_2=-1 \end{cases}$. Al resolver el sistema se encuentran $\alpha_1=\frac{1}{5}$ y $\alpha_2=-\frac{2}{5}$. Por tanto, $\frac{1}{5}(t+3)-\frac{2}{5}(-2t+4)=t-1$. Así que la respuesta es sí.

13.3.2. Segundo ejemplo. Teórico. ¿$\{-t^2+t+3, t^2-4\}$ genera a P_2?[4]

Solución:

Se tiene que resolver la ecuación $\alpha_1(-t^2+t+3)+\alpha_2(t^2-4)=at^2+bt+c$ donde el polinomio del lado derecho es un polinomio genérico de P_2.

Procediendo como en el ejemplo anterior $(-\alpha_1+\alpha_2)t^2+\alpha_1 t+(3\alpha_1-4\alpha_2)=at^2+bt+c$.

El sistema resultante es $\begin{cases} -\alpha_1+\alpha_2=a \\ \alpha_1=b \\ 3\alpha_1-4\alpha_2=c \end{cases}$. La matriz aumentada correspondiente es $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 3 & -4 & c \end{array}\right)$ y la matriz escalonada reducida es $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 4a+b+c \end{array}\right)$. Este sistema solo

4 Este ejemplo es distinto del anterior porque en este caso se pregunta si cualquier vector (o un vector genérico) es una combinación lineal de los que se encuentran en el conjunto. En el ejemplo anterior se preguntaba por un caso particular.

es consistente cuando $4a+b+c=0$, en cualquier otro caso no. Por tanto, el conjunto $\{-t^2+t+3, t^2-4\}$ no genera a P_2. Un polinomio como t^2+t+1 no es una combinación lineal de $-t^2+t+3$ y t^2-4, para t^2+t+1, $a=1, b=1$ y $c=1$ de tal forma que $4a+b+c=6\neq 0$.

13.3.3. Tercer ejemplo. Aplicación. A partir de una mezcla de 6 gramos de uvas pasas rubias, 7 gramos de maní sin sal y 4 gramos de almendras y de otra mezcla de 9 gramos de uvas pasas rubias, 12 gramos de maní sin sal y 6 gramos de almendras, se quiere obtener un nuevo producto con las siguientes condiciones: 10 gramos de uvas pasas rubias, 2 gramos de maní sin sal y 3 gramos de almendras. ¿Es posible hacer esta mezcla de mezclas con las especificaciones dadas?

Solución:

Paso 1: Discusión del problema: Desean hacer una mezcla a partir de dos mezclas de productos. Cada mezcla base tiene los mismos ingredientes y la resultante también; no obstante, debemos saber si podemos cubrir las especificaciones que se proponen para el nuevo producto.

Paso 2: Definición de las incógnitas presentes en el modelo.

α_i:= escalar que multiplica al vector que representa la mezcla i, tal que $i=1{,}2$.

Paso 3: Restricciones o limitaciones del problema. $\alpha_1\langle 6,7,4\rangle+\alpha_2\langle 9,12,6\rangle=\langle 10,2,3\rangle$. Lo que es equivalente a $\begin{cases} 6\alpha_1+9\alpha_2=10 \\ 7\alpha_1+12\alpha_2=2 \\ 4\alpha_1+6\alpha_2=3 \end{cases}$.

Paso 4: Condiciones técnicas: $\alpha_i\geq 0$.

Paso 5: Escoja el método con el que va a resolver el sistema (o el objeto matemático que represente la situación). El sistema se resolverá por eliminación de Gauss-Jordan porque es 3×2.

Paso 6: Resuelva el sistema (o el objeto matemático que represente la situación).

La matriz aumentada $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 9 & 10 \\ 7 & 12 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{array}\right)$ y la matriz escalonada reducida es $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. De donde se concluye que el sistema es inconsistente.

Paso 7: Validación de la solución: Sistema inconsistente.

Paso 8: Solución al modelo. No es posible crear el nuevo producto a partir de los productos existentes.

13.3.4. Cuarto ejemplo. Teórico. Describa el aspecto geométrico y haga una gráfica de las envolventes lineales $H_1 = \langle\langle 2,3,-4\rangle\rangle$ y $H_2 = \langle\langle 3,-2,0\rangle,\langle 1,1,-1\rangle\rangle$ como subespacios de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Este ejercicio indaga por H_1 que es el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de $\langle 2,3,-4\rangle$. Como es un solo vector las combinaciones lineales resultan ser múltiplos escalares de $\langle 2,3,-4\rangle$.

Así, $H_1 = \langle\langle 2,3,-4\rangle\rangle = \{\boldsymbol{v} = t\langle 2,3,-4\rangle, t \in \mathbb{R}\}$. Cualquier vector $\boldsymbol{v} \in H_1$, $\boldsymbol{v} = \langle x,y,z\rangle = t\langle 2,3,-4\rangle,\ t \in \mathbb{R}$, de modo que$x = 2t; y = 3t; z = -4t$. Como $t \in \mathbb{R}$, estas son las ecuaciones paramétricas de una recta. Por tanto, H_1 es una recta que pasa por el origen y su gráfica está en la Figura 25 (a).

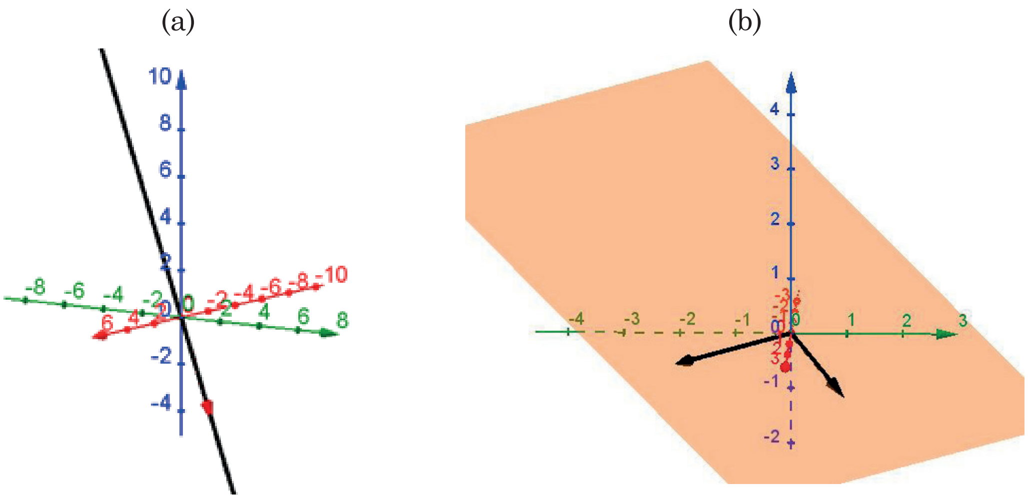
Ahora, $H_2 = \langle\langle 3,-2,0\rangle,\langle 1,-1,-1\rangle\rangle = \{v = \alpha_1\langle 3,-2,0\rangle + \alpha_2\langle 1,1,-1\rangle \text{ con } \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\}$, es decir, H_2 como envolvente lineal es el conjunto de las combinaciones lineales formadas por los dos vectores. Para $\boldsymbol{v} \in H_2$, $\boldsymbol{v} = \langle x,y,z\rangle = \alpha_1\langle 3,-2,0\rangle + \alpha_2\langle 1,1,-1\rangle$. Al considerar $\boldsymbol{v} = \langle x,y,z\rangle$ fijo, esta ecuación representa un sistema cuyas incógnitas son $\alpha_1 y \alpha_2$,

$$\begin{cases} x = 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ y = -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ z = -\alpha_2 \end{cases}$$

La matriz aumentada es $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & x \\ -2 & 1 & y \\ 0 & -1 & z \end{array}\right)$ y la matriz escalonada reducida es $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{x}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2x+3y}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2x+3y+5z}{5} \end{array}\right)$.Este sistema solo tienen solución cuando $2x + 3y + 5z = 0$, es decir,

$\frac{2x+3y+5z}{5}=0$. Por tanto, H_2 es un plano que pasa por el origen; la gráfica de este plano está en la Figura 25 (b).

Figura 25. Aspectos geométricos de las evolventes lineales de un vector y dos vectores en el espacio.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

11.3.5. Quinto ejemplo. Teórico. Determine si el conjunto $H=\{Senx, Cosx, e^x\}$, en el espacio vectorial $C(-\infty,\infty)$ es LI.

Solución:

En este caso, la técnica apropiada para decidir la dependencia o independencia lineal es el wronskiano. En este caso, H es un conjunto de vectores, es linealmente independiente en $C(-\infty,\infty)$ porque la función wronskiano es

$$w(x)=\begin{vmatrix} senx & \cos x & e^x \\ \cos x & -senx & e^x \\ -senx & -\cos x & e^x \end{vmatrix}=-2e^x\neq 0$$

13.4. Ejercicios guiados

13.4.1. Primer ejemplo. Exprese el polinomio $-9t^2+41t-30$ como combinación lineal de los polinomios $4t^2-3t+1, -t^2+5t-3, 7t^2+12t-15$.

Para su desarrollo, denomine los polinomios dados como: $\boldsymbol{v}=-9t^2+41t-30$, $\boldsymbol{v}_1=4t^2-3t+1$, $\boldsymbol{v}_2=-t^2+5t-3, v_3=7t^2+12t-15$. Recuerde que, para que v se pueda expresar como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, es porque existen escalares α_1, α_2 y α_3, tales que:

$$\boldsymbol{v}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\alpha_3\boldsymbol{v}_3.$$

Remplace los polinomios $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ en la ecuación $\boldsymbol{v}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\alpha_3\boldsymbol{v}_3$

....

....

....

Ahora simplifique la parte derecha de la igualdad, esto es, realice las operaciones de los escalares α_1, α_2 y α_3, por los polinomios y luego agrupe los términos semejantes; ¿a qué resultado llega?

....

....

....

Ahora, recuerde que para que el polinomio $\boldsymbol{v}$ del lado izquierdo de la igualdad sea igual al que usted obtuvo en el paso anterior, los coeficientes de los términos de grados iguales deben ser los mismos; ¿qué sistema de ecuaciones obtiene?

....

....

Resuelva el sistema anterior por el método más eficiente de los estudiados en las secciones anteriores.

....

....

Una vez resuelto el sistema, finalice remplazando en $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{v}_3$, cada escalar y cada vector conforme a sus valores.

....

....

....

13.4.2. Segundo ejemplo. ¿El conjunto $S = \{\langle 3,2,-1\rangle, \langle 4,5,-2\rangle, \langle -1,0,1\rangle\}$ genera el espacio $\mathbb{R}^3$?

Para que el conjunto S genere el espacio $\mathbb{R}^3$, cualquier elemento $\langle a,b,c\rangle \in \mathbb{R}^3$ debe ser una combinación lineal de los vectores de S. Escriba la ecuación que simboliza lo dicho anteriormente (donde la parte del lado izquierdo de la igualdad es la combinación lineal de los vectores de S, y la parte del lado derecho de la igualdad es $\langle a,b,c\rangle$.

....

....

....

En la ecuación anterior, usted debe simplificar la parte del lado izquierdo de la igualdad para obtener un sistema de ecuaciones; ¿qué sistema obtiene?

....

....

....

Fíjese en que las incógnitas del sistema son los escalares de la combinación lineal del conjunto S, y a, b y c son valores que representan a cualquier vector $\langle a,b,c\rangle \in \mathbb{R}^3$. Resuelva el sistema anterior utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan; ¿cómo interpreta la matriz escalonada reducida?

....

....

....

Finalmente, ¿el conjunto S genera o no el espacio $\mathbb{R}^3$?

....

....

....

13.4.3. Tercer ejemplo. Determine si $S=\left\{\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ es un conjunto LI en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

En este caso se implementará la definición, así que el conjunto S es linealmente independiente si la combinación lineal nula del conjunto S tiene como única solución la trivial. En otras palabras, igualado a **0** (donde **0**, es la matriz nula $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, los escalares de la combinación lineal deben ser todos iguales a 0. Exprese la combinación lineal nula para el conjunto S.

....

....

Simplifique esta expresión, esto es, haga las operaciones de escalares por matrices y suma de matrices.

....

....

Iguale la expresión anterior, lo más simplificada que pueda, con la matriz nula. Plantee el sistema homogéneo 4×4.

....

....

Resuelva el sistema homogéneo anterior. Cualquier sistema homogéneo tiene al menos una solución que es la trivial, lo que nos interesa es comprobar que no hay más soluciones diferentes a esta, para que sea LI. ¿A qué resultado llega?

....

....

¿Cuál es su respuesta a la pregunta formulada?

....

....

Una exploración más: para $A_{4\times 4}$ definida como la matriz del sistema homogéneo de ecuaciones, ¿cuál es el valor del determinante de A?, ¿qué relación tiene el valor de este determinante con la pregunta formulada?

....

....

13.5 Ejercicios propuestos

13.5.1. Determine si el conjunto de matrices $S=\left\{\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-13 & 14\\ -8 & -27\end{pmatrix}\right\}$ son linealmente independientes o dependientes en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

13.5.2. ¿El conjunto $S=\{\langle 1,-2,3\rangle,\langle 2,1,5\rangle,\langle 3,1,-2\rangle\}$ genera el espacio $\mathbb{R}^3$?

13.5.3. Analice si los polinomios $2t^2-t+5$, $9t^2+t+6$ y $5t^2+3t-4$ generan a P_2.

13.5.4. Exprese $\langle 20,6,-32\rangle$ como combinación lineal de los vectores $\langle 3,-1,5\rangle,\langle -1,4,11\rangle$ y $\langle 2,6,-10\rangle$.

13.5.5. ¿El conjunto $S=\{\langle 4,3,-1,0\rangle,\langle 2,-1,2,-1\rangle,\langle 3,2,1,2\rangle,\langle 3,0,0,-3\rangle\}$ es linealmente independiente o dependiente? En caso de que sea linealmente dependiente, exprese el primer vector como combinación lineal de los otros tres.

13.5.6. ¿Para qué valor de β serán linealmente dependientes los vectores $\langle 1,3,2\rangle,\langle 2,5,-1\rangle,\langle -1,\beta,4\rangle$?

13.5.1. Escriba la solución al sistema homogéneo en términos de uno o más vectores linealmente independientes $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+x_4=0\\ -2x_1+x_2+6x_3-2x_4=0\end{cases}$

13.5.1. Determine un conjunto de vectores que genere el espacio solución[5] de $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ donde

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 6 & -2\end{pmatrix}$$

13.5.1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos generan a P_2?

a. $\{-3x^2+4x-3,\ x^2+9,\ 2x^2-6\}$
b. $\{2x^2+3x+7,\ x^2+4x+1,\ -x^2-5x\}$
c. $\{x^2+2x-1, x+1, x^2+3x+2\}$
d. $\{2x^2-x+3,\ -5x^2+2x+1\}$

5 Algunas veces se refieren a este espacio como el espacio nulo de la matriz A.

13.6. Preguntas de tipo Saber Pro

13.6.1. Preguntas de selección múltiple con única respuesta

1) La afirmación “si A es una matriz invertible” ***NO*** es equivalente a afirmar que:

   A. $|A| \neq 0$

   B. $\boldsymbol{A}$ es equivalente a I_n por renglones

   C. $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ solo tiene solución trivial para todo $\boldsymbol{B}$

   D. Las filas de $\boldsymbol{A}$ son linealmente independientes

2) Un conjunto generador para P_2 es

   A. $\{t^2 - 1, 4 - t^2\}$

   B. $\{1, -t^2, 3 - t^2\}$

   C. $\{2t, 4 - t, t^2 - 1\}$

   D. $\{-1, t^2 - 1, 3 - t^2\}$

3) Es un conjunto de funciones linealmente independiente:

   A. $\{t^2 - 1, 4 - t^2, 1\}$

   B. $\{senh(x), e^x, e^{-x}\}$

   C. $\{cosh(x), e^x, e^{-x}\}$

   D. $\{1, e^x, e^{-x}\}$

4) La envolvente lineal de $S = \{1 - x^3, 3 - x^2, 1 - x, 5 - x - x^2 - x^3\}$ es:

   A. P_3

   B. P_3 $a + b - 3c + d = 0$

   C. P_3 con $a + 3b + c + d = 0$

   D. P_3 con $a - b - 3c + d = 0$

5) La envolvente de $\langle 2, 1, -3\rangle$ y $\langle 1, -1, -2\rangle$ es:

   A. $\langle 3, 0, -5\rangle$

   B. $x + 7y - 3z = 0$

   C. $5x - y + 3z = 0$

   D. $x - 7y + 3z = 0$

6) En la envolvente de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ se encuentra:

   A. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$

   B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

   C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   D. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

13.6.2. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

7) Si $|A| \neq 0$ entonces:
   1. A no es invertible
   2. A es el producto de matrices elementales
   3. Las columnas de A son linealmente independientes
   4. La forma escalonada por filas de A tiene $n-1$ pivotes

8) El sistema $\begin{cases} x-y-2z=0 \\ 3x+y-z=0 \end{cases}$ admite como solución, vectores de la forma
   1. $t\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$
   2. $t\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$
   3. $s\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$
   4. $s\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

9) Si se tienen $\boldsymbol{u} = \langle -1,2 \rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle 1,-1 \rangle$, $\boldsymbol{r} = \langle -1,3 \rangle$ entonces se cumple que:
   1. Son linealmente independientes
   2. Cualquiera de ellos puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos
   3. Con sólo uno de ellos se puede generar $\mathbb{R}^2$
   4. La representación de la envolvente de $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}\}$ es $\mathbb{R}^2$

10) Sea $A = \left\{ M_{2\times 2}: \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \text{con } a \in \mathbb{R} \right\}$ y

    $B = \left\{ M_{2\times 2}: \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{con } a,d \in \mathbb{R} \text{ y } a+d=0 \right\}$ entonces:
   1. Los vectores columna de $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{A}$ generan a $\mathbb{R}^2$.
   2. Los vectores columna de $\boldsymbol{w} \in B$ generan a $\mathbb{R}^2$.
   3. Una combinación lineal de $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{w} \in B$ no generan a $M_{2\times 2}$
   4. La envolvente de A es el conjunto de matrices $M_{2\times 2}$ simétricas

11) Con el conjunto de polinomios $\{t^2+2t-1, t^2-1\}$ puede representar a:
   1. $2t^2+2t-2$
   2. $2t^2+2t-1$
   3. $-3t^2+2t+3$
   4. $2t^2-2t-1$

12) Sean las funciones $f(x) = cos^2 x$, $g(x) = sen^2 x$, $h(x) = cos(2x), p(x) = 1$
    entonces:
   1. f y g son linealmente independientes.
   2. f, g y h son linealmente independientes.
   3. f y h son linealmente independientes.
   4. f, g y p son linealmente independientes.

13.7. Recursos informáticos recomendados

13.7.1 Recursos de cálculo online

1. wims.unice.fr, ofrece en http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi una calculadora en línea que permite llevar a cabo análisis sobre vectores, en particular analizar la dependencia o independencia lineal de hasta 16 vectores en dimensiones hasta 10 y de establecer combinaciones lineales de los mismos. Las componentes de estos vectores pueden ser números reales o incluso complejos, así como expresiones paramétricas.
2. Wolfram Alpha ofrece en los links https://www.wolframalpha.com/input/?i=Are+(2,+-1)+and+(4,+2)+linearly+independent%3F&lk=3, https://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+independence+(1,+3,+-2),+(2,+1,+-3),+(-3,+6,+3)&lk=3, https://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+independence+of+%7B(1,+3,+-1),+(-1,+k,+5),+(4,+7,+h)%7D, y https://www.wolframalpha.com/input/?i=linear+independence+(a,+b,+c,+d),+(e,+f,+g,+h),+(i,+j,+k,+l)&lk=3. Con estos permite analizar la independencia lineal o no de elementos, así como el espacio generado desde el conjunto de vectores, y condiciones requeridas para la independencia lineal.
3. Adicionalmente con la opción wronskian se puede calcular el wronskiano de funciones (estas se deben introducir separadas por comas como se sugiere en https://www.wolframalpha.com/input/?i=wronskian+of+e%5E(-2t),+te%5E(-2t)

13.7.2 Algunos videos de apoyo

1. Mezcla de mezclas https://youtu.be/KOmGN19tkzM (5:11)
2. Wronskiano https://youtu.be/temhtAoR99Q (7:20)
3. Elementos de la envolvente lineal https://www.youtube.com/watch?v=dR3LjOQJe8Q (8:17)
4. Envolvente lineal https://www.youtube.com/watch?v=P0Y4Dkuhuy0 (8:10)
5. Conjunto generador (Ejemplo 1) https://www.youtube.com/watch?v=vuSXH8H6DG0 (13:34)
6. Conjunto generador (Ejemplo 2) https://www.youtube.com/watch?v=Nm1urRtDz10 (9:10)
7. Wronskiano https://youtu.be/temhtAoR99Q (7:21)
8. Elementos de la envolvente lineal https://www.youtube.com/watch?v=dR3LjOQJe8Q (8:17)
9. Envolvente lineal https://www.youtube.com/watch?v=P0Y4Dkuhuy0 (8:10)
10. Conjunto generador (Ejemplo 1) https://www.youtube.com/watch?v=vuSXH8H6DG0 (13:34)
11. Conjunto generador (Ejemplo 2) https://www.youtube.com/watch?v=Nm1urRtDz10 (9:10)

14 BASES Y DIMENSIÓN

14.1. Introducción

La sección destinada a bases y dimensión tiene como orientación el estudio y la descripción algebraica de las bases de los espacios y subespacios vectoriales como conjuntos de vectores que representan al espacio vectorial. Las bases de espacios y subespacios vectoriales son importantes para el estudio de las propiedades de un espacio vectorial y de las transformaciones lineales en vista de que una base es un conjunto minimal que describe al espacio vectorial completo. En forma técnica, para un espacio vectorial V un conjunto finito de vectores $S=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ es una base para V si: 1) S es un conjunto generador de V; y 2) S es linealmente independiente (Anton, 1984, pág. 162), (Kolman & Hill, 2013, pág. 251).

Para ello se inicia con los teoremas de reconocimiento de la definición de base, luego se ejecutan algoritmos para calcular bases en dos opciones: 1) el conjunto inicial tiene demasiados vectores, más de los que se requieren para estar en la base, es decir, el conjunto es linealmente dependiente, por lo cual hay redundancia en los vectores; y 2) el conjunto inicial de vectores no representa al espacio o subespacio vectorial, en otras palabras, no es conjunto generador y, por tanto, no alcanza a representar cada vector del espacio como una combinación lineal.

Al finalizar esta sección se comparan algunas formas de indagar por la base para el espacio nulo de una matriz A, es decir, por la base del espacio solución de un sistema homogéneo en el que A es la matriz de coeficientes.

14.2 Objetivos de información

- Analizar la importancia, en la definición de base, de que el conjunto de vectores sea linealmente independiente y que sea conjunto generador.
- Ejecutar algoritmos para cálculo de bases de espacios y subespacios vectoriales.
- Calcular la base para el espacio nulo de una matriz.
- Implementar la definición de dimensión para un espacio o subespacio vectorial.

14.3 Ejemplos resueltos

14.3.1. Primer ejemplo. Teórico. Determine si el conjunto de vectores $S=\{t^2,2-t\}$ es una base para P_2.

Solución:

Para saber si S es una base para P_2, hay varias posibilidades de argumentación. En esta oportunidad mostraremos tres opciones de argumentación que usted puede adaptar a casos similares.

Opción 1: P_2 no puede ser una base para P_2 porque $\dim P_2=3$, dicho de otra manera, todas las bases de P_2 tienen tres vectores y S no satisface esta condición.

Opción 2: S contiene polinomios cuadráticos, lineales constantes y el polinomio cero. De modo que con los dos vectores de S debería representarse cualquiera de estos polinomios como una combinación lineal. Veamos lo que ocurre con el polinomio constante 5; para este polinomio deben existir escalares α_1 y α_2, tales que $5=\alpha_1 t^2+\alpha_2(2-t)$. Así, $5=\alpha_1 t^2+\alpha_2(2-t)=2\alpha_2-\alpha_2 t+\alpha_1 t^2$. Al comparar el polinomio de la izquierda con el de la derecha se observa el sistema $\begin{cases}\alpha_1=0\\-\alpha_2=0\\2\alpha_2=5\end{cases}$. Lo que claramente es una contradicción porque tiene dos valores diferentes asignados. El razonamiento en esta opción es por contraejemplo.

Opción 3: Para comprobar que es una base hay que ver que es un conjunto generador para P_2 y que a su vez es linealmente independiente. Para la primera condición hay que comprobar si es posible encontrar escalares α_1 y α_2

tales que $c+bt+at^2=\alpha_1 t^2+\alpha_2(2-t)=2\alpha_2-\alpha_2 t+\alpha_1 t^2$. Lo que es equivalente a $c+bt+at^2=2\alpha_2-\alpha_2 t+\alpha_1 t^2$. De donde se conforma el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha_1 = a \\ -\alpha_2 = b \\ 2\alpha_2 = c \end{cases}$$

que es un sistema condicionado por $2b+c=0$ y, por tanto, $S=\{t^2, 2-t\}$ **no** genera a P_2 y por esto no puede ser una base.

14.3.2. Segundo ejemplo. Teórico. En el espacio vectorial $C(-\infty,\infty)$, determine una base para el subespacio $W=\langle S\rangle$ donde $S=\{\cos^2 t, sen^2 t, 1\}$.

Solución:

Debemos usar el algoritmo que permite calcular la base para una envolvente lineal (ver (Kolman & Hill, 2013, pág. 256)).

Paso 1: Hay que ver si es LI o es LD. Para esto debemos encontrar escalares α_1, α_2 y α_3 tales que

$$\alpha_1 cos^2 t+\alpha_2 sen^2 t+\alpha_3\times 1=0.$$

Con la identidad pitagórica se tiene que $\cos^2 t+sen^2 t=1$, de modo que $\cos^2 t+sen^2 t-1=0$. Así, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$ y $\alpha_3=-1$. De donde S es LD.

Paso 2: Se requiere eliminar un vector del conjunto. Se decidió eliminar el vector 1[6], $S_1=\{\cos^2 t, sen^2 t\}$.

Paso 3: Ahora, hay que ver si S_1 es LI o es LD. En este caso, la mejor técnica para esta argumentación es el wronskiano, de donde $w(t)=\begin{vmatrix} cos^2 t & sen^2 t \\ -2cost\ sent & 2sent\ cost \end{vmatrix}=2sent\ cost=sen2t\neq 0$ (la función nula).

Así, S_1 es LI. Note que $sen2t=0$, $t=\pi/2$. Esto no cambia la conclusión a la que llegamos porque es apenas un cero de la función.

6 En este paso del algoritmo se puede eliminar cualquier vector. Recuerde que las bases para un espacio vectorial V no son únicas, pero si deben tener el mismo número de vectores. Además. Si usted tiene dos bases distintas, digamos B_1 y B_2 de V deben poderse representar los vectores de B_1 como combinación lineal de los de B_2 y viceversa.

Por tanto, S_1 es una base para $W=\langle\{\cos^2 t, sen^2 t, 1\}\rangle$. Este algoritmo eliminó un vector que era redundante y que no podía hacer parte de la base.

14.3.3 Tercer ejemplo. Teórico. Encuentre una base para $H=\langle\{\langle 1,4\rangle,\langle 1,-1\rangle,\langle -1,3\rangle,\langle 4,1\rangle\}\rangle$.

Solución:
Los vectores generadores de H son LD porque son 4 vectores en $\mathbb{R}^2$. Aplicaremos un algoritmo para reducir y controlar el número de vectores ya que son redundantes.
Paso 1: La combinación lineal nula con los vectores de H es:

$$\alpha_1\langle 1,4\rangle+\alpha_2\langle 1,-1\rangle+\alpha_3\langle -1,3\rangle+\alpha_4\langle 4,1\rangle=\langle 0,0\rangle$$

Paso 2: Con la combinación lineal anterior se forma el sistema homogéneo

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+4\alpha_4=0 \\ 4\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4=0 \end{cases}$$

La matriz aumentada asociada es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$ y la escalonada reducida es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & 3 & 0 \end{array}\right)$.

Como los unos pivotes (o principales) quedaron en la primera y segunda columnas, son los vectores de la primera y segunda columnas de la matriz aumentada original, los vectores que entran a la base. Los otros dos vectores no eran necesarios y se pueden conseguir como combinación lineal de los dos primeros.
Paso 3: Una base queda constituida por $\{\langle 1,4\rangle,\langle 1,-1\rangle\}$, recuerde que hay más opciones a través de las combinaciones lineales.

14.3.4. Cuarto ejemplo. Teórico. Determine una base y la dimensión para los subespacios de $\mathbb{R}^3$:
La recta con ecuaciones paramétricas $L: x=7t, y=-t, z=4t$ con $t\in\mathbb{R}$.
El plano $\pi: 2x+4y-z=0$.

Solución:

La recta L y el plano π contienen al origen y son subespacios de $\mathbb{R}^3$. El ejercicio pide encontrar, en cada caso, un conjunto mínimo de vectores que represente a cualquier vector del subespacio.

Para el inciso a, se observa que la ecuación vectorial de L muestra cómo son los vectores cuya cabeza está sobre L.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7t \\ -t \\ 4t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Así, $\left\{\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ es una base para la recta L; como la base está conformada por un solo vector, la dimensión de L es 1, de otra manera, $dimL=2$.

Para el inciso b, conviene resaltar que $z = 2x + 4y$, más específicamente, los vectores en el plano π son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$$

Lo cual tiene una representación bi-paramétrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 2t+4s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 4s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{s}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ con } s,t \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{s}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ con $s,t \in \mathbb{R}$, el plano π es generado por $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$. Estos vectores son LI y, por tanto, forman una base para el plano $\pi: 2x + 4y - z = 0$. $dim\,\pi = 2$ en vista de que la base tiene dos vectores.

14.3.5. Quinto ejemplo. Teórico. El ejercicio que se propone en este ítem está redactado de tres modos diferentes, pero refieren a la misma situación.

Enunciado 1: Encuentre una base y la dimensión para el espacio de solución S del sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Enunciado 2: Encuentre una base y la dimensión para el espacio nulo de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Enunciado 3: Encuentre una base y la dimensión para el espacio de solución S del sistema homogéneo $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

En los tres enunciados se pregunta por la descripción por comprensión del conjunto de infinitas soluciones del sistema homogéneo. La descripción debe hacerse mediante la base del conjunto S ya que esto indica que cualquier vector solución debe ser una combinación lineal de los vectores de la base. Para resolver el sistema del enunciado 1 hay que usar el método de eliminación de Gauss-Jordan, esto implica conformar la matriz aumentada.

En el enunciado 2 se indaga por el espacio nulo de A, es decir, que pregunta por la solución del sistema de ecuaciones en que A es la matriz de coeficientes y los valores del lado derecho son ceros. De nuevo, debemos resolver el sistema homogéneo, pero en vez de tener las ecuaciones tenemos la matriz de coeficientes del sistema.

El enunciado 3 muestra la ecuación matricial equivalente al sistema de ecuaciones y la matriz de coeficientes. Como el orden de A es 2×4, se puede deducir que $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{0}$ son de orden 4×1 y 2×1, respectivamente, para que sean compatibles bajo el producto de matrices. Entonces, hay que resolver $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$.

Teniendo clara la equivalencia de los enunciados, se conforma la matriz aumentada $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$, la matriz escalonada reducida es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right)$. Esta última matriz advierte que el sistema tiene infinitas soluciones y forman una familia bi-paramétrica.

Esto es, $x_1 = 4t + 6s$, $x_2 = 4t + 5s$, $x_3 = t$ y $x_4 = s$ Así, las soluciones son $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 4t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6s \\ 5s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $s, t \in \mathbb{R}$.

Note que los vectores son LI, además de ser generadores del conjunto solución S. Por consiguiente, cualquier solución del sistema $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ está en la envolvente lineal de

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Es así que B es la base para S, que es el conjunto solución del sistema o que es el espacio nulo de A. Finalmente, la $dim S = 2$.

14.4. Ejercicios guiados

14.4.1. Primer ejemplo. Dadas las matrices $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, determine si S es una base para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. En caso de serlo, exprese la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores de la base.

Para su desarrollo, exprese una combinación lineal genérica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de S para tener una idea de los elementos de la envolvente lineal $\langle S \rangle$.

....

....

....

Efectúe las operaciones indicadas de suma y multiplicación de matrices y plantee un sistema de ecuaciones; ¿cuál es este sistema?

....

....

....

Resuelva el sistema anterior por el método más apropiado, ¿a qué resultado llega?

....

....

....

¿Qué puede responder a la pregunta si $\langle S\rangle = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$? (si en su solución aparece una condición que se deba ajustar para que este sistema tenga solución, su respuesta debe ser que $\langle S\rangle \neq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

....

....

....

Si su respuesta es que $\langle S\rangle = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, entonces para probar que S es LI, basta tomar $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en el sistema de ecuaciones que usted ya ha resuelto y determinar que la única solución es la trivial. Finalmente, ¿es el conjunto S una base para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

....

....

....

Si su respuesta es afirmativa, termine este ejercicio expresando la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, como combinación lineal de la base (note que no necesita volver a resolver una vez más otro sistema, lo único que usted debe hacer es igualar $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, y como usted ya obtuvo una solución con respecto a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, solo debe remplazar por los valores que toma cada componente).

....

....

....

14.4.2. Segundo ejemplo. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, halle una base y la dimensión para el espacio nulo de A.

Para empezar este ejercicio, es necesario recalcar que el espacio nulo referente a la matriz A, significa $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$, donde X representa un vector columna de tamaño 4×1, y donde $\mathbf{0}$ representa un vector columna de tamaño 4×1. Con base en esto, describa el sistema de ecuaciones homogéneo $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$.

....

....

....

Resuelva dicho sistema utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan. ¿A qué resultado llega?

....

....

....

Si observa, tiene más variables que ecuaciones, y por tanto, debe parametrizar. Recuerde que se parametriza tantas veces como sea la diferencia de número de incógnitas con el número de ecuaciones. ¿A qué parametrización llega?

....

....

....

Exprese $\boldsymbol{X}$ en términos de los vectores resultantes de la parametrización efectuada. Estos vectores corresponderán a la base en forma general.

....

....

....

Asigne un valor no nulo al o a los parámetros para así obtener una base del espacio solución nulo. Cuente los vectores en la base, siempre que no esté compuesta por el solo vector $\mathbf{0}$. ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo?

....

....

....

14.4.3. Tercer ejemplo. Para $S = \{-3x^2 + 2x + 1, x^2 + 5, 2x^2 - 3, -3x^2 + 6x\}$, determine una base para el subespacio de P_2, $W = \langle S \rangle$. ¿Cuál es la $dimW$?

Si se observa el conjunto S, tiene 4 polinomios y si usted recuerda la $dimP_2 = 3$, ¿qué puede decir entonces del conjunto S?

....

....

....

Para determinar una base de este conjunto, haga una combinación lineal genérica que sea igual al cero de P_2; ¿a qué sistema de ecuaciones se llega?

....

....

....

Ahora con método de eliminación de Gauss-Jordan encuentre una base del conjunto dado . Es decir, lleve la matriz de coeficientes del sistema a la forma escalonada reducida por filas y busque los vectores correspondientes a las columnas que contienen los unos principales ya que estos constituyen una base para $W = \langle S \rangle$. ¿Cuál es su respuesta?

....

....

....

Para contestar la pregunta final, cuente los elementos que tiene la base calculada; este número corresponderá a la dimensión, ¿Cuál es la $dimW$?

....

....

....

14.5. Ejercicios propuestos

14.5.1 Dado el conjunto $S=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -3\\ 5 & 7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & -5\\ 9 & 8\end{pmatrix}\right\}$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

a. Verifique que el conjunto genera a $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b. Compruebe que el conjunto es linealmente independiente.

c. Exprese la matriz $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 10\end{pmatrix}$ como combinación lineal de la base S.

14.5.2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 5\\ -2 & -4 & -3 & 14\\ 4 & 7 & 2 & -9\end{pmatrix}$, halle una base para el espacio nulo de A, y determine su dimensión.

14.5.3. Determine una base para el plano $2x-3y+5z=7$.

14.5.4. Determine la dimensión y una base del espacio solución del sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4+x_5=0\\ 2x_2-4x_3-x_4+3x_5=0\\ x_1-x_3+2x_4=0\end{cases}$$

14.5.5. Determine una base y su dimensión para el subespacio de P_2 constituido por los vectores de la forma at^2+bt+c, donde $b=3a-c$.

14.5.6. Encuentre una base para $\mathbb{R}^3$, que incluya los vectores $\langle 1,-2,5\rangle,\langle 3,0,1\rangle$.

14.5.7. Sea $S=\{2t^3+4t^2+t-2,\ 2t^3+7t^2-t-2, 3t^3+t^2-t+4,\ 3t^2-2t\}$. Determine una base para el subespacio de P_3, $W=\langle S\rangle$ ¿Cuál es la $dimW$?

14.5.8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son base para $\mathbb{R}^3$?

a. $\{\langle 1,3,-5\rangle,\langle -1,1,7\rangle,\langle 2,-1,0\rangle,\langle 4,0,1\rangle\}$

b. $\{\langle 2,-1,5\rangle,\langle 1,-3,6\rangle,\langle -3,1,0\rangle\}$

c. $\{\langle 3,1,-1\rangle,\langle 2,-3,6\rangle\}$

14.5.9. Encuentre el valor de b, para que $\{\langle 7,-1,0\rangle,\langle 3,2,b\rangle,\langle -4,-3,1\rangle\}$ no sea una base para $\mathbb{R}^3$.

14.5.10. Determine, en caso de ser posible, el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que el conjunto S sea una base para P_2, donde $S=\{t^2-t, 3t^2+at-2, 5t^2+t+a\}$.

14.6. Preguntas de tipo Saber Pro

Antes de abordar estas preguntas debe revisar las definiciones de base y de dimensión en espacios y subespacios vectoriales. Usted encontrará que debe tener claridad sobre lo que es un espacio generador y la independencia lineal, lo que eventualmente requerirá que revise sus clases magistrales anteriores (9 y 11). De otra parte, es importante que tenga en cuenta los teoremas sobre base y dimensión.

14.6.1. Preguntas de selección múltiple con única respuesta

1) Dado $S=\{x^2-4, x-2, x+2, x^2-2x+1\}$, entonces ***NO*** es posible tener como base de $\langle S\rangle$ al conjunto:

A. $\{x^2-4, x-2\}$

B. $\{x^2-4, x^2-2x+1\}$

C. $\{x-2, x+2\}$

D. $\{x^2-4, x-2\}$

2) Una base para $\{\langle -1,2,0\rangle, \langle 3,-1,4\rangle, \langle 6,7,5\rangle, \langle 1,3,4\rangle\}$ es:

A. $\{\langle -1,2,0\rangle, \langle 3,-1,4\rangle\}$

B. $\{\langle 3,-1,4\rangle, \langle 6,7,5\rangle\}$

C. $\{\langle -1,2,0\rangle, \langle 6,7,5\rangle, \langle 1,3,4\rangle\}$

D. $\{\langle -1,2,0\rangle, \langle 6,7,5\rangle\}$

3) Se quiere construir una base para $\mathbb{R}^3$ que incluya a $\langle 1,0,2\rangle, \langle -1,2,4\rangle$ entonces **NO** se puede contemplar que la base sea:

A. $\{\langle 1,0,2\rangle, \langle -1,2,4\rangle, \langle 1,0,0\rangle\}$

B. $\{\langle 1,0,2\rangle, \langle -1,2,4\rangle, \langle 2,-2,-2\rangle\}$

C. $\{\langle 1,0,2\rangle, \langle -1,2,4\rangle, \langle 0,1,0\rangle\}$

D. $\{\langle 1,0,2\rangle, \langle -1,2,4\rangle, \langle 1,2,3\rangle\}$

4) Una base para el subespacio $3x-4y+3z=0$ es:

A. $\left\{\left\langle\begin{matrix}1\\-1\\0\end{matrix}\right\rangle, \left\langle\begin{matrix}0\\3\\-4\end{matrix}\right\rangle\right\}$

B. $\left\{\left\langle\begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix}\right\rangle, \left\langle\begin{matrix}0\\3\\4\end{matrix}\right\rangle\right\}$

C. $\left\{\left\langle\begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix}\right\rangle, \left\langle\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right\rangle\right\}$

D. $\left\{\left\langle\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}\right\rangle, \left\langle\begin{matrix}0\\-3\\4\end{matrix}\right\rangle\right\}$

5) Una base para $x=5ty=-2t, z=\frac{2}{3}t$ es:

A. $\left\langle\begin{matrix}5\\2\\\frac{2}{3}\end{matrix}\right\rangle$

B. $\left\langle\begin{matrix}-15\\6\\2\end{matrix}\right\rangle$

C. $\left\langle\begin{matrix}-5\\2\\\frac{2}{3}\end{matrix}\right\rangle$

D. $\left\langle\begin{matrix}15\\-6\\2\end{matrix}\right\rangle$

6) Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes, es correcto afirmar que un conjunto base para $\mathbb{R}^3$ es:

A. $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}\}$

B. $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\}$

C. $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\}$
D. $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\}$

14.6.2. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta.

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

7) Los siguientes conjuntos son bases para $\mathbb{R}^2$
1. $\{\langle 3,-4\rangle,\langle -1,\frac{4}{3}\rangle\}$
2. $\{\langle 3,-4\rangle,\langle 1,0\rangle\}$
3. $\{\langle -2,2\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 4,1\rangle\}$
4. $\{2\boldsymbol{i},-\boldsymbol{j}\}$

8) Dados el espacio P_3 y el conjunto $V=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}=\{3,t^3-4t+3,t^2\}$ entonces:
1. V no es base de P_3
2. Una base para $\langle V\rangle$ la puede determinar $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$
3. Una base la $\langle V\rangle$ no la puede determinar $\{\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$
4. V es base de P_3

9) Si $B=\{\langle 1,0,0\rangle,\langle 0,2,-3\rangle,\langle 1,1,0\rangle\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ tal que $\langle 1,-2,3\rangle=\alpha\boldsymbol{v}_1+\beta\boldsymbol{v}_2+\gamma\boldsymbol{v}_3$ entonces:
1. $\alpha=1$
2. $\alpha+\gamma=2$
3. $\alpha-\beta=2$
4. $\alpha+\beta=1$

10) Se tiene el conjunto de matrices $A=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ es correcto afirmar que:
1. A es una base para el espacio de matrices $M_{2\times 2}$ simétricas.
2. A una base para el espacio de matrices $M_{2\times 2}$ antisimétricas.
3. Es linealmente independiente y de dimensión 3.
4. A es una base para el espacio de matrices $M_{2\times 2}$.

11) Se tiene la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\-b&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$ y el conjunto $S=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^3 : A\boldsymbol{X}=0\}$ y se sabe que la dimensión de S sea 1, entonces:
1. El vector $\boldsymbol{X}$ tiene la forma $\begin{pmatrix}-a\\1\\1\end{pmatrix}$
2. La dimensión de la base es nula
3. Debe existir una relación entre a y b tal que $ab=-1$
4. El espacio nulo es el vector $\mathbf{0}$

12) Dada $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&-3\\0&0&-5\end{pmatrix}$, los valores de λ para los que el espacio nulo de la matriz λI_3-A no es trivial son:
1. $\lambda=-5$
2. $\lambda=-2$
3. $\lambda=1$
4. $\lambda=2$

14.7. Recursos informáticos recomendados

14.7.1. Recursos de cálculo online

1. En http://es.onlinemschool.com/math/assistance/vector/basis_inspection/, OnLineMSchool ofrece la posibilidad de verificar si un conjunto de n vectores constituyen una base para $\mathbb{R}^n$ hasta $n = 6$.
2. Wolfram Alpha ofrece mediante la instrucción *linear independence* la posibilidad de determinar en qué condiciones hasta tres vectores con cuatro entradas cada uno pueden ser linealmente independientes, admitiendo una o más entradas como parámetros. Así es posible encontrar varias bases para un mismo conjunto.

14.7.2. Algunos videos de apoyo

1. Definición de base de espacio vectorial https://youtu.be/lIJWGFKTh4E (7:44)
2. Algoritmo para cálculo de una base https://youtu.be/pV3SLV15HbE (5:51)
3. Dimensión de un espacio vectorial https://youtu.be/P6vyyca4hhQ (2:46)
4. Base para polinomios https://www.youtube.com/watch?v=x-VyvA3pPaU (5:37)
5. Bases y dimensión https://www.youtube.com/watch?v=69R7aYCFTto (10:20)
6. Base de un subespacio https://youtu.be/NR0v7TVWU8M (5:35)
7. Independencia lineal de funciones (Wroskiano) https://www.youtube.com/watch?v=yey-bLEI2DhU (6:51)
8. Combinación lineal de vectores https://www.youtube.com/watch?v=mFffyiDy1s0 (6:38)
9. Dependencia lineal y combinación lineal https://www.youtube.com/watch?v=4Pe-T3YZREhY (11:13)

15 TRANSFORMACIONES LINEALES, TRANSFORMACIONES MATRICIALES, KERNEL E IMAGEN

15.1. Introducción

Las transformaciones lineales (TL) son herramientas muy útiles en diferentes campos: para la toma de decisiones, para el procesamiento de imágenes, para cambio de sistemas de coordenadas, en la derivación e integración de funciones. Para llevar a cabo el estudio de las TL, en principio hay que analizar los espacios vectoriales que son dominio y codominio de la aplicación, en seguida se tiene que entender la definición particular de la transformación para decidir si es o no lineal. Cuando la transformación es lineal, se estudian dos subespacios que contribuyen a identificar características de la TL: 1) el kernel ($kerT$) conformado por los vectores del espacio de salida cuyo valor funcional es el vector cero del espacio de llegada; y 2) la imagen (ImT) que es el subespacio del espacio de llegada que contiene los vectores que son imagen de algún vector del espacio de salida.

En los ejemplos practicaremos dos técnicas para calcular $kerT$ y ImT. Además, calcularemos las dimensiones de estos subespacios, denominadas nulidad (nuT) y rango ($ranT$), respectivamente.

Para los interesados en el tratamiento de fotografía podemos recomendar el libro de Solomon & Breckon que trabajan con el *software* Matlab® para cambiar el aspecto de fotografías con diferentes transformaciones para lograr múltiples efectos sobre ellas (Solomon & Breckon, 2011).

15.2. Objetivos de información

- Analizar e implementar la definición de transformación lineal.
- Reconocer el efecto de una transformación lineal sobre los vectores de una base.
- Representar matricialmente una transformación lineal.
- Calcular el kernel y la imagen de una transformación lineal.
- Aplicar el teorema de la dimensión.

15.3. Ejemplos resueltos

15.3.1. Primer ejemplo. Teórico. Determine si la transformación dada es lineal o no.

$$\begin{aligned} T\colon\ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución:

Para iniciar la solución (aunque realmente esto no se requiere para contestar la pregunta) elija los vectores que desee y calcule sus valores funcionales para ver cómo trabaja la función.

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Para comprobar si es lineal hay que considerar $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ entonces:

$$T(\boldsymbol{u})+T(\boldsymbol{v})=T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\x_1+y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\x_2+y_2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\(x_1+y_1)+(x_2+y_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$$

Además, si $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, se tiene que $\alpha T(\boldsymbol{u})=\alpha T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\\\alpha(x+y)\end{pmatrix}=T(\alpha\boldsymbol{u})$.

De modo que T es una TL.

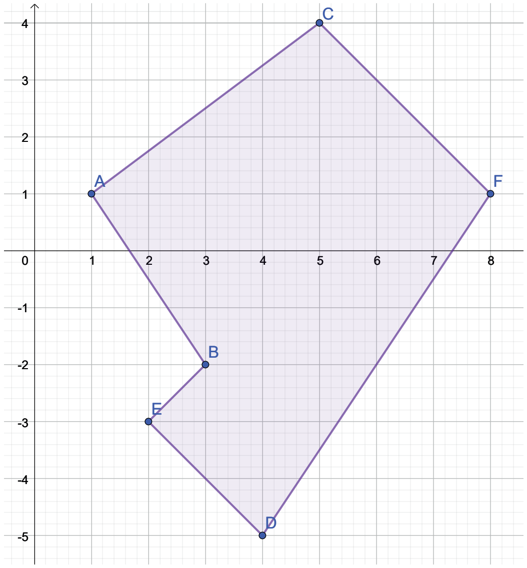
15.3.2. Segundo ejemplo. Teórico. Decida si la transformación dada es lineal o no

$$\begin{array}{rccc} det: & M_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & detA=|A| \end{array}$$

Solución:
La función determinante no es una TL porque $|A+B|\neq|A|+|B|$ y $|\alpha A|\neq\alpha|A|$.

15.3.3. Tercer ejemplo. Aplicación. Mediante la transformación de rotación, modifique la figura rotándola un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ en sentido antihorario.

Figura 26. Figura en el plano para rotar en sentido antihorario.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

Solución:

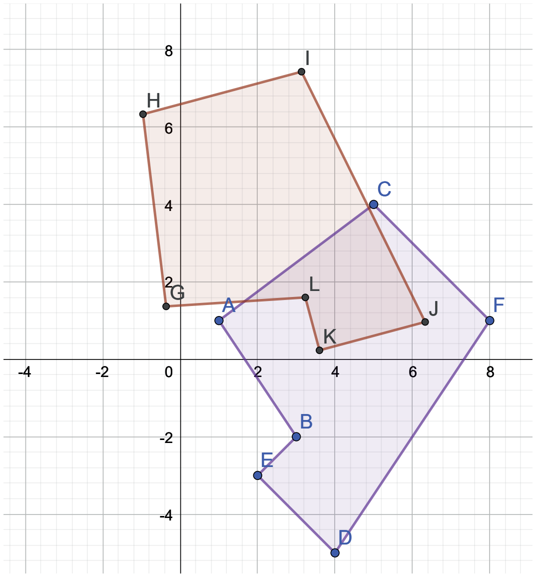
La transformación de rotación en el plano, para un ángulo θ medido en sentido antihorario, está definida por:

$$T_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ así, } \quad T_{\frac{\pi}{3}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para aplicar la transformación a cada uno de los vectores cuyo punto inicial es el origen y punto final uno de los vértices de la región, se procede como sigue:

$$T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

Figura 27. Figura en el plano rotada en sentido antihorario.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

Note que esto es lo que hacemos cuando editamos fotografías y las rotamos con ayuda de software. Con un clic, el *software* calcula la rotación para cada punto y por eso no se alcanza a percibir el proceso algebraico, aunque allí está.

15.3.4. Cuarto ejemplo. Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una TL tal que $T\langle 3,-1\rangle = \langle 0,1\rangle$ y $T\langle 1,-2\rangle = \langle 1,-1\rangle$. Calcule $T\langle 4,2\rangle$.

Solución:

Debemos tener en cuenta que toda transformación lineal $T:V \to W$ queda completamente determinada si sabemos cómo actúa sobre una base de V. En otras palabras, podemos escribir de forma explícita a T porque $S = \{\langle 3,-1\rangle, \langle 1,-2\rangle\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$ ya que $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ y se conoce el efecto de T sobre S.

Así, $\langle 4,2\rangle = \alpha_1\langle 3,-1\rangle + \alpha_2\langle 1,-2\rangle$ donde $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{-1}{5} & \frac{-3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$.

Entonces al aplicar T y sus propiedades se tiene que:

$$T\langle 4,2\rangle = 2T\langle 3,-1\rangle - 2T\langle 1,-2\rangle = 2\langle 0,1\rangle - 2\langle 1,-1\rangle = \langle -2,4\rangle.$$

15.3.5. Quinto ejemplo. Teórico. Para la TL $\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} & \mapsto & T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}\end{array}$ encuentre:

a. A_T, la matriz asociada a la TL, usando la base canónica para $\mathbb{R}^2$.
b. Determine la transformación M_T asociada.
c. Determine una base para $KerT$.
d. Determine una base para ImT.
e. Encuentre nuT, $ranT$ y verifique el teorema de la dimensión para T.

Solución:

Para encontrar A_T con la base canónica de $\mathbb{R}^2$, calcule los transformados de los vectores básicos $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.

$T\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ y $T\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$. Con estos vectores $A_T := \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, entonces la TL asociada es:

$$\begin{array}{rccc} M_T\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} & \mapsto & M_T\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\end{array}$$

Como $ker\,M_T = \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ con } \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ se tiene que resolver el sistema que aparece allí. La matriz de coeficientes es invertible porque su determinante es 1, implicando que la única solución es la trivial. De lo que se concluye que la base para $kerM_T$ es $\left\{\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ y por esto la base para $KerT$ es $\{\mathbf{0}\}$. No olvide que para la dimensión del subespacio nulo es 0.

Adicionalmente,

$$ImM_T = \left\{ \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ para algún vector con componentes } a \text{ y } b \right\}$$

Al ser la matriz escalonada reducida de la matriz aumentada $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$, se tiene que ImM_T tiene como base a $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. De donde, la base de ImT es $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ y tiene dos vectores.

Finalmente, $nuT = 0$, $ranT = 2$ y $dim\mathbb{R}^2 = 0 + 2 = 2$.

15.3.6. Sexto ejemplo. Teórico. Para la trasformación lineal T encuentre una base para $KerT$, ImT y calcule nuT y $ranT$. También, verifique el teorema de la dimensión.

$$\begin{array}{rrcl} T\colon & P_3 & \rightarrow & P_2 \\ & p(x) & \mapsto & Tp(x) = p'(x) \end{array}$$

Solución:

La TL es el operador derivado aplicado a los polinomios de grado menor o igual a tres. A manera de ilustración, note que $T(1 - 3x + 4x^2 + x^3) = -3 + 8x + 3x^2$.

En lo que sigue, las bases canónicas ordenadas para P_3 y P_2 son $\{1,x,x^2,x^3\}$ y $\{1,x,x^2\}$, respectivamente. Acorde con los vectores básicos de P_3, $T(1) = 0$; $T(x) = 1$; $T(x^2) = 2x$; $T(x^3) = 3x^2$.

En consecuencia, los vectores de coordenadas en la base de P_2 para los trasformados son:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Baste, como muestra de lo calculado, que $T(x^2) = 2x = 0 \times 1 + 2 \times x + 0 \times x^2$ como combinación lineal de los vectores básicos de P_2. Como la base está ordenada debemos entender que la primera entrada del vector columna corresponde al coeficiente de 1, la segunda es el coeficiente de x y la tercera el coeficiente de x^2, de donde resulta que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el vector de coordenadas de $2x$ en la base canónica de P_2.

Consideremos ahora, $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, así la transformación matricial asociada es:

$$\begin{array}{rccl} M_T: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} & \mapsto & M_T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \end{array}$$

Note que el conjunto de salida es $\mathbb{R}^4$ porque $dimP_3 = 4$ y el de llegada es $\mathbb{R}^3$ porque $dimP_2 = 3$.

La forma escalonada reducida de A_T es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, por consiguiente $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $kerM_T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $nuM_T = 1$. Con los unos principales, $Im\,M_T = \left\langle \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle, \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \right\rangle \right\rangle$ y $RanM_T = 3$. Observe que $1+3=4=dim\,\mathbb{R}^4$. Ahora, debemos contestar la pregunta original, esto es, sobre la transformación T.

$kerM_T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ implica que $kerT = \langle 1 \rangle$, además $ImM_T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$, $ImT = \langle 1, 2x, 3x^2 \rangle$.

Indiscutiblemente, nuestro cálculo es correcto y coincide con la teoría de las funciones que conocemos. En el kernel de la transformación $T(kerT)$ se encuentran las funciones que tienen derivada 0 y, como sabemos, son las constantes y estas son generadas por $\{1\}$ y en ImT están las funciones que son derivada de otra y estas son las generadas por $\{1, 2x, 3x^2\}$. Cualquier polinomio de P_2 es la imagen de un polinomio de P_3 mediante la derivada. Para evidenciarlo, es suficiente hacer una integral indefinida.

15.4. Ejercicios guiados

15.4.1. Primer ejemplo. Para $T{:}P_2 \to P_3$ dada por $T(at^2+bt+c)=\frac{1}{3}at^3+\frac{1}{2}bt^2+ct$, indique si T es transformación lineal. Si lo es, halle bases para el kernel y para la imagen de T. Además, halle el rango y la nulidad de T.

Vamos primero a inspeccionar si T es una transformación lineal, para ello tome dos polinomios como $p_1(t)=a_1t^2+b_1t+c_1$, y $p_2(t)=a_2t^2+b_2t+c_2$, ¿a qué resultado llega al realizar $T(p_1(t)+p_2(t))$?

....

....

Ahora desarrolle $T(P_1(t))+T(P_2(t))$.

....

....¿

Qué puede decir de los dos resultados anteriores? Para que su argumento tenga el aspecto de una prueba directa, inicie desde $T(p_1(t)+p_2(t))$ y llegue a $T(p_1(t))+T(p_2(t))$ a través de los procedimientos algebraicos que ya observó.[7]

....

....

Ahora, suponga que $\alpha \in \mathbb{R}$ es cualquier escalar y verifique que $T(\alpha \boldsymbol{v})=\alpha T(\boldsymbol{v})$.

....

....

Con los resultados anteriores se comprueba que T es una transformación lineal. Para hallar una base para el kernel de T, recuerde que $KerT=\{\boldsymbol{v}=p(t)\in P_2{:}T(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}_{P_3}$, donde $p(t)=at^2+bt+c\}$; aplique la transformación a $T(p(t))$.

....

....

7 La argumentación escrita debe iniciar en un lado de la igualdad y llegar al otro mediante procesos algebraicos. No es adecuado empezar por los lados de la igualdad y ver donde se conectan.

Ahora, con base en el resultado anterior obtenga la solución de $T(p(t)) = \mathbf{0}_{P_3}$.

....

....

¿Este conjunto solución es una base para $KerT$? ¿Cuál es la dimensión de esta base obtenida?, esta corresponderá a $\mathrm{Nu}(T)$.

....

....

Para hallar la imagen de T, tome el elemento del conjunto de llegada de la transformación, esto es, $\frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + ct$, y asocie en tres paréntesis separados por el operador suma los términos con letra a, b y c, (Es decir, $a(...) + b(...) + c(...)$)

....

....

El conjunto de polinomios que están dentro de los paréntesis anteriores corresponde en este caso a una base de la imagen de T. ¿Cuál es la dimensión de este conjunto?, este corresponde a $ranT$.

....

....

13.4.2. Segundo ejemplo. Halle $T\langle x,y\rangle$ si $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal tal que

$$T\langle 1,3\rangle = \langle 4,5\rangle,\ T\langle 2,-1\rangle = \langle 1,3\rangle$$

Considerando que toda transformación lineal $T\colon V \to W$, queda completamente determinada si se conoce su efecto sobre una base de V, y que el conjunto $\{\langle 1,3\rangle, \langle 2,-1\rangle\}$ conforma una base sobre $V = \mathbb{R}^2$, exprese $\langle x,y\rangle$ como una combinación de la base sobre V.

....

....

Para obtener la solución usted encontrará los escalares c_1 y c_2 tal que $c_1\langle 1,3\rangle + c_2\langle 2,-1\rangle = \langle x,y\rangle$. Como T es transformación lineal, se cumple que para cualquier par de escalares y cualquier par de vectores en V, $T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1T(\boldsymbol{v}_1) + c_2T(\boldsymbol{v}_2)$.
Aplique T a ambos lados de $c_1\langle 1,3\rangle + c_2\langle 2,-1\rangle = \langle x,y\rangle$

....

....

Como usted ya conoce $T\langle 1,3\rangle$ y $T\langle 2,-1\rangle$, remplace esto en el resultado anterior y simplifique, así obtendrá la respuesta a: ¿cómo es $T\langle x,y\rangle$?

....

....

Para verificar su resultado, compruebe si funciona calculando $T\langle 1,3\rangle$y $T\langle 2,-1\rangle$, en caso de que no sea igual a lo que usted ya conoce en el enunciado inicial, revise sus cálculos.

....

....

15.5. Ejercicios propuestos

15.5.1. Indique cuáles de las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales. Para aquellas que lo sean, halle bases para el kernel y para la imagen; halle además el rango y la nulidad.

a. $T: P_2 \to P_1$ dada por $T(at^2+bt+c)=2at+b$.

b. $L: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a-b+2c+d+3$.

c. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\langle a,b,c\rangle = \langle 2a,-b+c,3b+c\rangle$.

d. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\langle a,b,c\rangle = \langle 1,4a+c,b-a\rangle$.

e. $L: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & b+c \\ 0 & a+b+d \end{pmatrix}$.

15.5.2. Sea T una transformación lineal, donde $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es tal que $T\langle -1,3\rangle = \langle 1,2\rangle$, $T\langle 2,4\rangle = \langle -5,7\rangle$; halle $T\langle 1,1\rangle$ y $T\langle x,y\rangle$.

15.5.3. Sea T una transformación lineal, donde $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es tal que $T\langle 2,5\rangle = \langle 2,5,1\rangle$, $T\langle 3,-1\rangle = \langle 1,-1,0\rangle$; halle $T\langle 17,-17\rangle$ y $T\langle x,y\rangle$.

15.5.4. Dada la transformación lineal $T: P_2 \to P_2$ definida por

$$T(ax^2+bx+c) = (a+2b)x^2 + (b-c)x + (a+2c)$$

a. Calcule $T(x^2+3x-5)$.

b. ¿$6x^2-3x-3 \in Ker T$?

c. $¿x^2 - x + 1 \in KerT$?

d. $¿x^2 - 7x - 6 \in ImT$?

e. $¿x^2 + 4x \in ImT$?

f. Usando la base canónica para P_2, encuentre A_T.

g. Determine una base para el $KerT$.

h. Determine una base para la ImT.

i. Verifique el teorema de la dimensión para la transformación T.

15.5.5. Dada la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$

a. Calcule $T\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. $¿\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in KerT$?

c. $¿\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in KerT$?

d. $¿\begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix} \in ImT$?

e. $¿\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in ImT$?

f. Usando la base canónica para $\mathbb{R}^3$, encuentre A_T.

g. Determine una base para el $KerT$.

h. Determine una base para la ImT.

i. Verifique el teorema de la dimensión para la transformación T.

15.6. Preguntas de tipo Saber Pro

El tratamiento de estas temáticas requiere que usted tenga claras las definiciones y propiedades asociadas a las transformaciones lineales; en este sentido es importante que revise la teoría sobre las transformaciones lineales y que eventualmente se apoye en los conceptos presentados en los textos ofrecidos como referencias bibliográficas del curso.

15.6.1. Preguntas de selección múltiple con única respuesta

1) Al rotar el vector $\langle 3,4\rangle$ en sentido horario con $\theta = 45°$ se obtiene:
   - A. $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{2}\right\rangle$
   - B. $\left\langle \frac{7\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$
   - C. $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right\rangle$
   - D. $\left\langle \frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$

2) Sea T una transformación lineal tal que: $T(1) = -2$, $T(t+2) = 1$, $T(t^2+t) = 0$ entonces $T(3t^2-2t+2)$ es:
   - A. -29
   - B. -19
   - C. -9
   - D. -2

3) Sea T una transformación de $P_2 \to P_1$ tal que: $T(at^2+bt+c) \mapsto abt - c + 1$ entonces se cumple que:
   - A. $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$
   - B. $T(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha T(\boldsymbol{u})$
   - C. $T(\mathbf{0}_v) = T(\mathbf{0}_u)$
   - D. $T(\mathbf{0}_v) \neq T(\mathbf{0}_u)$

4) Si T es una transformación de $P_2 \to P_1$ tal que: $T(at^2+bt+c) \mapsto bt - a$ se cumple que la transformación de la base canónica es:
   - A. $\{-1,0,0\}$
   - B. $\{1,-t,0\}$
   - C. $\{-1,t,0\}$
   - D. $\{-1,t,t\}$

5) Sea $B_1 = \{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ y $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, si $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, al escribir $\boldsymbol{X}$ en términos de la base $B2$ se obtiene:
   - A. $\begin{pmatrix}x\\-3x+2y\end{pmatrix}$
   - B. $\begin{pmatrix}x\\-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y\end{pmatrix}$
   - C. $\begin{pmatrix}x\\\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y\end{pmatrix}$
   - D. $\begin{pmatrix}-x\\\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y\end{pmatrix}$

6) Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ entonces se tiene que:

A. $Ker(A)=\left\{\left\langle\begin{matrix}1\\-1\\2\end{matrix}\right\rangle\right\}$

B. $nu(A)=2$

C. $Im(A)=\left\langle\begin{matrix}-1\\1\\1\end{matrix}\right\rangle$

D. $ran(A)=2$

15.6.2. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

7) Un triángulo con vértices $A(0,0), B(3,4), C(0,5)$ gira un ángulo de 135° en sentido antihorario respecto al vértice A, para obtener el triángulo A',B',C'. Es correcto afirmar que:

1. El área se duplica
2. El perímetro no varía.
3. El vértice C' es $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$
4. La matriz de transformación es $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

8) Para el sistema $\begin{cases}2x-y+3z=0\\ 4x-2y+6z=0\\ -6x+3y-9z=0\end{cases}$ se cumple que:

1. Una base para el espacio solución del sistema es: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$
2. La dimensión del espacio solución es $\mathbb{R}^2$
3. $\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}$ es generado en el espacio solución.
4. Una base para el espacio solución del sistema es $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\right\}$

9) Si T es una transformación de $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que:

$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x-y\\y+2z\end{pmatrix}$ se cumple:

1. $KerT=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$
2. $T\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}=0$
3. $nuT=1.$
4. $T\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

10) Si T es una transformación de $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que:

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x-y\\y+2z\end{pmatrix}$ se cumple:

1. $ranT=1$
2. $ImT=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$
3. $T=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$
4. $Ran(T)=2$

11) Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,

$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $X_{B_0} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, entonces:

1. $X_{B_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $X_{B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$
3. $X_{B_1} - X_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{25}{2} \\ -\frac{13}{2} \end{pmatrix}$
4. $X_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

12) Sea una transformación lineal $T{:}M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to$,

donde $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$, $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -3$, $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$,

$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$, y una matriz $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces

se cumple que:

$T{:}M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \;\; T(\boldsymbol{u}) = 3a - 3bc - d$

$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$T{:}M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \;\; T(\boldsymbol{u}) = 3a - 2b - c - d$

$T\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -6$

15.7. Recursos informáticos recomendados

15.7.1. Recursos de cálculo online

1. En http://es.onlinemschool.com/math/assistance/vector/basis_expansion/ OnLineMSchool ofrece la posibilidad de descomponer un vector en n dimensiones en una base con vectores $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ conocidos.
2. Wolfram Alpha ofrece en https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/algebra/matrices/ la opción Other Matrix Operations, que permite evaluar el rango y la nulidad de un conjunto de matrices, una base y una base ortogonal (estas son de especial relevancia para algunas aplicaciones específicas). Igualmente en https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/geometry/geometric-transformations/ permite evaluar, visualizar y determinar el efecto de una matriz de transformación para la rotación, reflexión y cizalladuras de objetos geométricos (estos aspectos conceptuales son relevantes en muchos campos de las ciencias y las artes).

15.7.2. Algunos videos de apoyo

1. Definición de transformación lineal y ejemplos https://youtu.be/nMrCVhQlYsY (13:39)
2. Kernel e imagen de una transformación lineal https://youtu.be/yD7I3SrshcU (13:18)
3. Kernel – imagen – nulidad y rango de una transformación https://www.youtube.com/watch?v=ihNiiN0ZUNI (10:55)
4. Construcción de una transformación lineal https://www.youtube.com/watch?v=iJuN_fp7jBo (11:36)
5. Transformaciones lineales https://youtu.be/H0W0p6VA9bQ (6:03)
6. Transformaciones lineales https://www.youtube.com/watch?v=l4nzgVrNtvg (12:57)

16 EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

16.1. Introducción

Con el estudio de las transformaciones lineales de un espacio en sí mismo aparece la oportunidad de analizar los vectores cuya imagen es un vector paralelo al original. El paralelismo entre vectores no nulos implica que un vector es múltiplo escalar no nulo del otro. De ahí que el procedimiento implica encontrar los escalares y los vectores que satisfacen esta condición. Tales escalares y vectores se llaman eigenvalores y eigenvectores, respectivamente. Nuestro trabajo en esta sección reúne dos aspectos de este estudio: 1) considerando la transformación matricial asociada calcularemos los eigenvalores y los eigenvectores; 2) la interpretación de estos para la transformación lineal.

Es importante que tenga en el recuerdo inmediato la factorización de polinomios y la solución de ecuaciones, pues esto es un prerrequisito para hacer los cálculos necesarios.

16.2. Objetivos de información

- Calcular los eigenvalores y los eigenvectores para una matriz dada.
- Determinar la multiplicidad algebraica y geométrica de los eigenvalores para una transformación lineal.
- Interpretar los eigenvalores y los eigenvectores en el marco de la transformación lineal original y la transformación matricial asociada.

16.3. Ejemplos resueltos

16.3.1. Primer ejemplo. Algorítmico. Encuentre los eigenvalores y los eigenvectores para la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución:

Para calcular los eigenvalores hay que resolver la ecuación $|\lambda I_2 - A| = 0$ donde λ es la incógnita de la ecuación e I_2 es la matriz identidad compatible bajo la suma con A. $|\lambda I_2 - A| = \left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right| = 0.$

Al efectuar las operaciones indicadas, se obtiene que:

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 7)(\lambda - 4) + 2 = \lambda^2 - 11\lambda + 30 = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática se encuentran dos raíces o ceros reales y diferentes $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 5$.

Para calcular los eigenvectores resolveremos dos sistemas homogéneos de la forma $(\lambda I_2 - A)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, uno cuando $\lambda_1 = 6$ y otro cuando $\lambda_2 = 5$.

Para $\lambda_1 = 6$, el sistema homogéneo toma el aspecto $(6I_2 - A)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, lo que es equivalente a que

$$\begin{pmatrix} \lambda - 7 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sea } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Note que la matriz de coeficientes tiene determinante cero, tal como se calculó antes.

Ahora, si la matriz aumentada es $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$, la matriz escalonada reducida es $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones y estas son paramétricas $x - 2y = 0$, de donde $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$.

Para $\lambda_2 = 5$, el sistema homogéneo es $(5I_2 - A)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, es decir, $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De nuevo, la matriz de coeficientes tiene determinante cero. Como la matriz aumentada es $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$, la matriz escalonada reducida es $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Las infinitas soluciones son paramétricas $x - y = 0$, de donde $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$.

Como usted puede apreciar, se hicieron los cálculos completos, pero queda pendiente un aspecto importante y es ¿qué significan estos cálculos para una transformación lineal?, ¿qué interpretación tienen esos valores y vectores calculados? El siguiente ejemplo resuelto los contextualiza en las TL.

16.3.2. Segundo ejemplo. Aplicación. Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{rccl} T\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Encuentre los eigenvalores y los eigenvectores asociados a la matriz de la TL e interprételos para T.

Solución:

Esta TL transforma vectores del plano en vectores del plano mediante una multiplicación por una matriz. Por ejemplo, $T\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix}$con la multiplicación usual entre matrices.

Debemos calcular vectores no nulos que al transformarlos se conviertan en vectores paralelos al original, esto es,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ que es equivalente a } \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De aquí que $\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&-2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. De modo que se requieren soluciones no nulas para el sistema homogéneo

$$\left(\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&-2\\1&4\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Por eso en el ejemplo anterior hemos calculado los valores para los cuales $\left|\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&-2\\1&4\end{pmatrix}\right|=0$. Allí obtuvimos que $\lambda_1=6 y \lambda_2=5$ eran los valores buscados.

Para $\lambda_1=6$ encontramos que los vectores que resolvían el sistema eran $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ con $t\in\mathbb{R}$. Por consiguiente, debemos entender que la TL actúa sobre los vectores de la recta con ecuación vectorial $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ con $t\in\mathbb{R}$ como una dilatación a seis veces su tamaño original. La TL toma un vector $\boldsymbol{v}$ de la recta y lo transforma en $6\boldsymbol{v}$, este resultado es equivalente a lo que da $\begin{pmatrix}7&-2\\1&4\end{pmatrix}\boldsymbol{v}$.

A manera de ilustración, considere el vector $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ de esta recta. Al transformarlo mediante T se encuentra que $T\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36\\18\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2=5$, la TL también actúa como una dilatación para los vectores en la recta $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ con $t\in\mathbb{R}$, pero los transforma en uno que tiene una norma cinco veces la original.

Para los vectores que no se encuentran sobre estas rectas, la TL no tiene ningún comportamiento especial.

14.3.3. Tercer ejemplo. Aplicación. Para la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & P_2 & \to & P_2 \\ & a_0+a_1x+a_2x^2 & \mapsto & T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_1+a_0)x+(a_2+a_0)x^2 \end{array}$$

a. Usando la base canónica para P_2, encuentre A_T.
b. Determine la transformación L asociada.
c. Encuentre los eigenvalores para A_T.
d. Determine las bases para los eigenespacios asociados a los eigenvalores encontrados para A_T.
e. Interprete los eigenvalores para A_T, en términos de la transformación T.

Solución:

Como la base canónica para P_2 es $\{1,x,x^2\}$, los transformados de los vectores básicos son

$$T(1)=x+x^2; \quad T(x)=x; \quad T(x^2)=x^2$$

De esta forma, los vectores de coordenadas en la base de P_2 para los trasformados son $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, de donde $A_T=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ y por consiguiente, la transformación matricial asociada es:

$$\begin{aligned} L:\ \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} &\mapsto L\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Lo que se debe encontrar es el conjunto solución no trivial para $(\lambda I_3-A_T)\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. Para calcular los eigenvalores debemos resolver $|\lambda I_3-A|=\left|\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right|=0$

De aquí se obtiene que:

$$\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\-1&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2=0$$

Esta ecuación característica implica que hay dos eigenvalores: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. $\lambda_1 = 0$ tiene multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 1$ tiene multiplicidad algebraica 2 (el factor tiene exponente 2).

Con $\lambda_1 = 0$, el sistema homogéneo es $(0I_3 - A_T)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, es decir, $(-A_T)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. La matriz aumentada de este sistema es $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ y la escalonada reducida es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Por esta razón, $v_1 + v_3 = 0$ y $v_2 - v_3 = 0$. Al parametrizar se encuentra que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$con $t \in \mathbb{R}$. El eigenespacio asociado a $\lambda_1 = 0$ es $E_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $\lambda = 0$ es de multiplicidad geométrica 1 (solo hay un vector en la base de E_0).

Análogamente, para $\lambda_2 = 1$ el sistema homogéneo es $(1I_3 - A_T)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, con lo cual $(I_3 - A_T)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Así, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ y la escalonada reducida correspondiente es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

En este caso $v_1 = 0$, v_2 y v_3 son parámetros. De modo que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$con t, $s \in \mathbb{R}$. El eigenespacio asociado a $\lambda_2 = 1$ es $E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\lambda_2 = 1$ es de multiplicidad geométrica 2.

En conclusión, se ha encontrado que la transformación lineal T actúa como un anulador sobre los polinomios que se encuentran en $\langle -1 + x + x^2 \rangle$, no olvide que el vector de coordenadas en la base canónica de $-1 + x + x^2$ es el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así mismo, T actúa como la identidad sobre polinomios en $\langle x, x^2 \rangle$, esto se da porque los vectores de coordenadas para x y x^2 son $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.

16.4. Ejercicios guiados

14.4.1. Para la transformación lineal $T: P_2 \to P_2$, definida por

$$T(at^2 + bt + c) = (2a + 4b + 3c)t^2 + (-4a - 6b - 3c)t + (3a + 3b + c)$$

Conteste las siguientes preguntas:

a. ¿$3t^2 - t + 5 \in Ker(T)$?;
b. ¿$-5t^2 + 7t - 2 \in Im(T)$?
c. Usando la base canónica para P_2, encuentre A_T.
d. Determine la transformación lineal matricial L asociada.
e. Determine una base para el $KerL$.
f. Determine una base para ImL.
g. Encuentre nuL y ranL y verifique el teorema de la dimensión para L.
h. Encuentre los eigenvalores para A_T.
i. Determine las bases para los eigenespacios asociados a los eigenvalores encontrados para A_T.
j. Interprete los eigenvalores para A_T, en términos de la transformación L.

Para resolver cada una de las preguntas, siga el procedimiento indicado.

a. Aplique T $(3t^2 - t + 5)$, si su resultado es **0**, su respuesta será afirmativa; en caso contrario dirá que no. ¿Cuál es su respuesta?

....

....

....

b. Recuerde que para comprobar esto, debe tomar un $\boldsymbol{v} = at^2 + bt + c \in P_2$ y verificar si el sistema $T(at^2 + bt + c) = -5t^2 + 7t - 2$ tiene solución. ¿Qué encuentra?

....

....

....

c. Recuerde que la base canónica de P_2 es $\{t^2, t, 1\}$. Halle los vectores transformados de cada una, esto es, $T(t^2), T(t)$ y $T(1)$; una vez obtenga estos resultados, ordene en una matriz 3×3 (donde se ordena cada resultado anterior en forma de columna), luego $A_T = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$; complete los espacios de la matriz.

....

....

....

d. La matriz L asociada pedida corresponde a la multiplicación $A_T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. ¿A qué resultado llega?, ¿cuál es la transformación L asociada?

....

....

....

e. Recuerde que el kernel de L es $KerL = \{\boldsymbol{v} = at^2 + bt + c \in P_2 : T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W\}$, entonces obtenga la solución de $T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W$; ¿el conjunto obtenido es una base para $KerL$?

....

....

....

f. Para determinar de una manera rápida la ImL, tome la simplificación de la matriz $A_T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ y exprésela como una combinación lineal de la forma $A_T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$; complete la información de estas casillas vacías. ¿Estos tres vectores columna son base para ImL? Si no es así, halle la base ya que esto es lo solicitado.

....

....

....

g. Anote los valores de $nuL =$ y $ranL =$. Ahora verifique que $nuL + ranL = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

h. Para encontrar los eigenvalores para A_T, realice $|A_T - \lambda I_3| = 0$, donde I_3 es la matriz identidad de tamaño 3×3. ¿Cuáles son los valores de λ que satisfacen dicha ecuación?

....

....

....

i. Para determinar las bases para los eigenespacios asociados a los eigenvalores encontrados para A_T, remplace los valores de λ obtenidos en el paso anterior a la ecuación $(A_T - \lambda I_3)x = 0$, y resuelva el anterior sistema homogéneo. Los vectores x que se obtengan serán los generadores de los eigenespacios. ¿Cuáles son sus resultados finales?

....

....

....

j. Para interpretar los resultados del paso anterior, por ejemplo si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ es uno de los eigenvectores, realice $A_T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ y compare con $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, para ver qué sucede, ¿Cuál es su respuesta a este ítem? Tenga en cuenta los eigenvalores para la interpretación como una dilatación, contracción, inversión o anulación.

....

....

....

16.5. Ejercicios propuestos

16.5.1. Con la transformación lineal $\begin{array}{rccc} T: & M_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \to & M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & ? & T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 2b \\ c & 2a-b \end{pmatrix} \end{array}$, responda las siguientes preguntas.

a. ¿$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in KerT$?

b. ¿$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in ImT$?

c. Usando la base canónica para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, encuentre A_T.

d. Determine la transformación L asociada.

e. Determine una base para $KerL$ y para $KerT$.

f. Determine una base para ImL y para ImT.

g. Encuentre nuL, $ranL$ y verifique el teorema de la dimensión para L. Haga estos cálculos para T.

h. Encuentre los eigenvalores para A_T.

i. Determine las bases para los eigenespacios asociados a los eigenvalores encontrados para A_T.

j. Interprete los eigenvalores para A_T, en términos de las transformaciones L y T.

16.5.2. Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & P_2 & \to & P_2 \\ & at^2+bt+c & \mapsto & T(at^2+bt+c) = (a-b)t^2 + (2b+c)t + (2a+c) \end{array}$$

a. ¿$t^2+t-2 \in KerL$?

b. ¿$t^2+2t+4 \in ImT$?

c. Usando la base canónica para P_2, encuentre A_T.

d. Determine la transformación L asociada.

e. Determine una base para $KerL$ y para $KerT$.
f. Determine una base para ImL y para ImT.
g. Encuentre nuL, $ranL$ y verifique el teorema de la dimensión para L. Haga estos cálculos para T.
h. Encuentre los eigenvalores para A_T.
i. Determine las bases para los eigenespacios asociados a los eigenvalores encontrados para A_T.
j. Interprete los eigenvalores para A_T, en términos de las transformaciones L y T.

16.5.3. Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{rcl} T\colon \quad \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \langle x,y,z\rangle & \mapsto & T\langle x,y,z\rangle = \langle 4x-y+6z, 2x+y+6z, 2x-y+8z\rangle \end{array}$$

a. ¿$\langle 1,0,-1\rangle \in KerT$?
b. ¿$\langle 9,9,9\rangle \in ImT$?
c. Usando la base canónica para $\mathbb{R}^3$, encuentre A_T.
d. Determine la transformación L asociada.
e. Determine una base para $KerL$ y para $KerT$.
f. Determine una base para ImL y para ImT.
g. Encuentre nuL, $ranL$ y verifique el teorema de la dimensión para L. Haga estos cálculos para T.
h. Encuentre los eigenvalores para A_T.
i. Determine las bases para los eigenespacios asociados a los eigenvalores encontrados para A_T.
j. Interprete los eigenvalores para A_T, en términos de las transformaciones L y T.

16.6. Preguntas de tipo Saber Pro

Antes de iniciar la solución de estas preguntas de tipo Saber Pro es importante que usted tenga claras las definiciones, el procedimiento para determinar los eigenvalores y eigenvectores de una matriz, y la forma de obtener la matriz asociada a una transformación lineal.

16.6.1 Preguntas de selección múltiple con única respuesta

1) Sea $T: P_2 \to P_2$ definida por $T(a+bx+cx^2) \mapsto -2c+(a+2b+c)x+(a+3c)x^2$ Entonces para la matriz asociada a la transformación lineal T en la base canónica se tiene que los eigenvalores son:
   - A. $\lambda=-1, \lambda=-2$
   - B. $\lambda=-1, \lambda=2$
   - C. $\lambda=1, \lambda=-2$
   - D. $\lambda=1, \lambda=2$

2) Sea $T: P_2 \to P_2$ definida por $T(a+bx+cx^2) \mapsto -2c+(a+2b+c)x+(a+3c)x^2$ Entonces, para la matriz asociada a la transformación lineal T en la base canónica se tiene que los eigenvectores son:
   - A. $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$
   - B. $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$
   - C. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$
   - D. $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

3) Si $A_T = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\\alpha^3 & -3\alpha^2 & 3\alpha\end{pmatrix}$ es una matriz asociada a una transformación lineal, entonces los eigenvalores cumplen que:
   - A. $\lambda_1=\alpha, \lambda_2=\frac{\alpha}{2}, \lambda_3=-\frac{\alpha}{2}$
   - B. $\lambda_1=\lambda_2=\alpha, \lambda_3=\frac{\alpha}{2}$
   - C. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\alpha$
   - D. $\lambda_1=\lambda_2=\frac{\alpha}{2}, \lambda_3=\alpha$

4) Si se tiene un ángulo de rotación θ en sentido antihorario tal que $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ entonces la matriz de transformación lineal está dada por $\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\theta\\sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}$, para los eigenvalores de esta matriz es correcto afirmar que:
   - A. Son dos valores reales diferentes.
   - B. Es un único valor real de multiplicidad 2.
   - C. Son $\lambda_1=-\lambda_1$.
   - D. No tiene solución en los reales.

5) Si $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está dada por $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\0 & -1 & 2\\1 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, entonces el

polinomio propio asociado a la matriz de la transformación lineal es:

A. $-\lambda^3-3\lambda^2+\lambda-1$
B. $\lambda^3+3\lambda^2-8\lambda+8$
C. $\lambda^3+\lambda^2-8$
D. $-\lambda^3-3\lambda^2+8\lambda$

6) Si $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es definida como $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}$, entonces los eigenvalores de la matriz asociada a la transformación son:

A. Reales diferentes
B. Reales idénticos
C. Nulos
D. Complejos

16.6.2 Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

7) Si A_T es una matriz asociada a una transformación lineal tal que su ecuación característica $\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)^3=0$, es correcto afirmar que:

1. La matriz A_T debe ser de orden 6
2. Se tienen tres eigenvectores asociados
3. Los valores de λ son $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$
4. Su polinomio característico es $\lambda^6-3\lambda^3+2$

8) Si $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es definida por:
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, entonces los eigenvalores de la matriz asociada a la transformación lineal son:

1. $\lambda=-2$
2. $\lambda=-1$
3. $\lambda=1$
4. $\lambda=2$

9) Si $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es definida como $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, entonces los eigenvectores de la matriz asociada a la transformación son:

1. $\left\langle\begin{smallmatrix}-2\\1\end{smallmatrix}\right\rangle$
2. $\left\langle\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right\rangle$
3. $\left\langle\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right\rangle$
4. $\left\langle\begin{smallmatrix}-2\\-1\end{smallmatrix}\right\rangle$

10) Si $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ es definida por
$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-1&2\\1&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, entonces de los eigenvalores asociado a la matriz de transformación es correcto afirmar que:

1. $\lambda=0$ tiene multiplicidad 2.
2. Ningún eigenvalor tiene multiplicidad diferente de 1.
3. Se tienen dos valores diferentes de eigenvalores.
4. Hay un único valor de λ real.

11) Sea $T:P_2\to P_2$ definida como $T(p(x))=p(2x+1)$ entonces se cumple que:

1. La matriz de transformación en la base canónica es $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&0&4\end{bmatrix}$
2. Los eigenvectores son $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$
3. Los eigenvalores de la matriz asociada son $\lambda=1,\lambda=2,\lambda=4$

4. La matriz de transformación en la base canónica es $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

12) Sea $T: P_2 \to P_2$ definida como $T(a+bx+cx^2) \mapsto (a+b)x+(a+c)x^2$ entonces se cumple que:

1. $anT = 2$
2. $ImT = \langle x^2, x \rangle$
3. $nuT = 2$
4. $KerT = \langle x^2 + x, 1 \rangle$

16.7. Recursos informáticos recomendados

16.7.1. Recursos de cálculo online

1. Symbolab ofrece en https://es.symbolab.com/solver/matrix-eigenvalues-calculator y en https://es.symbolab.com/solver/matrix-eigenvectors-calculator la opción de determinar y calcular los eigenvalores y eigenvectores asociados a una matriz de transformación hasta de orden 5. Usted deberá darle al sistema la matriz de entradas reales asociada a la transformación ya sea en base canónica o en otra base.
2. Wolfram Alpha, mediante la instrucción *eigenvalues* eingenvalores hasta matrices de orden 7, y presenta los eigenvectores asociados (disponible en https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigenvalues). De otra parte con la instrucción *eigenvectors* (disponible en https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigenvectors+%7B%7B1,+0,+0%7D,+%7B0,+0,+1%7D,+%7B0,+1,+0%7D%7D&lk=3) permite determinar los eigenvectores asociados a una matriz; presenta además los eigenvalores asociados y ofrece hasta para matrices de orden 3, una representación gráfica de los eigenvectores asociados.

   Adicionalmente, mediante la instrucción *characteristic polynomia* (disponible en https://www.wolframalpha.com/input/?i=characteristic+polynomial+%7B%7B4,+1%7D,+%7B2,+-1%7D%7D&lk=3) posibilita encontrar el polinomio característico asociado a una matriz, ofreciendo además una representación del mismo y sus formas algebraicas alternativas.
3. La calculadora online https://matrix.reshish.com/es/gauss-jordanElimination.php le puede ayudar en la reducción por filas para encontrar los eigenvectores.

16.7.2. Algunos videos de apoyo

1. Eigenvalores y eigenvectores https://youtu.be/HwpJ7oYHW5Q (14:12)
2. Casos para los eigenvalores y eigenvectores https://youtu.be/LhzXL59M93E (7:12)
3. Preguntas de selección sobre eigenvalores y eigenvectores https://youtu.be/smZol79e10c (9:32)
4. Valores propios matriz de rotación https://youtu.be/ZTO9GpISnq8 (8:39)
5. Valores y vectores propios (Matriz de probabilidad) https://youtu.be/vy-jmzQkASs (11:44)

17 APLICACIÓN Y MODELACIÓN CON BASE EN LOS EIGENVALORES Y LOS EIGENVECTORES

17.1. Introducción

La aplicación y la modelación de eigenvalores y eigenvectores es bastante amplia. Para esta sección hemos seleccionado algunas de estas aplicaciones y de los modelos que tienen su base en la teoría de los eigenvalores y eigenvectores con la anotación de que existen muchos más y que animamos a explorarlas porque son de una gran riqueza y utilidad que pueden ofrecerle oportunidades de comprensión y entendimiento en sus propias disciplinas y campos de estudio.

Para ilustrar la modelación hemos elegido: 1) el modelo de crecimiento de población de Leslie, que puede ser consultado en muchas publicaciones, aunque en particular recomendamos los textos de Grossman (Grossman, 1996, págs. 556-560), (Grossman, 1998, págs. 193-204); 2) el proceso jerárquico Analítico (AHP) como modelo multicriterio para la toma de decisiones. Anderson *et al*. presentan este algoritmo de forma muy detallada y clara, por lo cual recomendamos su consulta (Anderson, Sweeny, & Williams, 1998, págs. 752-753). Para conocer una aplicación del AHP a la comprensión de los fenómenos sociales, se sugiere la lectura de Barragán (Barragán, 2016); 3) las formas cuadráticas cuya teoría puede ser revisada en Kolman (Kolman & Hill, 2013, págs. 373-380) y 4) la forma matricial de ecuaciones diferenciales (Grossman, 2007, págs. 595-600).

La intencionalidad pedagógica de esta sección es aproximar a los estudiantes a la lectura y discusión de artículos y secciones de libros de consulta para el aprendizaje de la modelación.

Para el entendimiento de las lecturas y modelos se sugiere emplear la metodología de la Figura 1 implementada durante el curso y el formato para hacerla operativa y que se encuentra en el desprendible de la sección.

17.2 Objetivos de información

- Aplicar la teoría de los eigenvalores y eigenvectores al estudio de una población, a la toma de decisiones y a las formas cuadráticas.
- Modelar problemas sencillos mediante la teoría de los eigenvalores y eigenvectores.

17.3 Ejemplos resueltos

15.3.1. Un aspecto importante del análisis de funciones en varias variables es poder determinar su comportamiento, particularmente cuando no se encuentra en lo que se denomina la forma estándar o canónica. Una forma cuadrática en dos variables es una expresión de la forma $ax^2+bxy+cy^2=d$ que a su vez puede interpretarse como una función de la forma $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=d$, donde el término en xy indica que la cuadrática está rotada un ángulo θ respecto al sistema cartesiano. Además, en forma vectorial se puede reexpresar como $F(x,y)=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$. Puede igualmente mostrarse que si λ_1 y λ_2 son los valores propios asociados a A, entonces $ax^2+bxy+cy^2=d$ puede expresarse como $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2=d$, donde x', y' se refiere a un sistema de referencia en el cual la cuadrática no está rotada y, por tanto, su identificación es inmediata. En este contexto, clasifique la curva

$$3x^2-4xy+2y^2=3.$$

Solución:

Identificando con la forma general $a=3, b=-4, c=2, d=3$ (luego $\frac{b}{2}=-2$) Así, la matriz A es $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, cuyos eigenvalores deben satisfacer la eigenecuación determinada por $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)(2-\lambda)-4=0$, es decir, que $\lambda^2-5\lambda+6-4=0$ o $\lambda^2-5\lambda+2=0$ cuya soluciones son

$$\lambda=\frac{5\pm\sqrt{25-4(1)(2)}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25-8}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Por tanto, $\lambda_1=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ y $\lambda_2=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$.

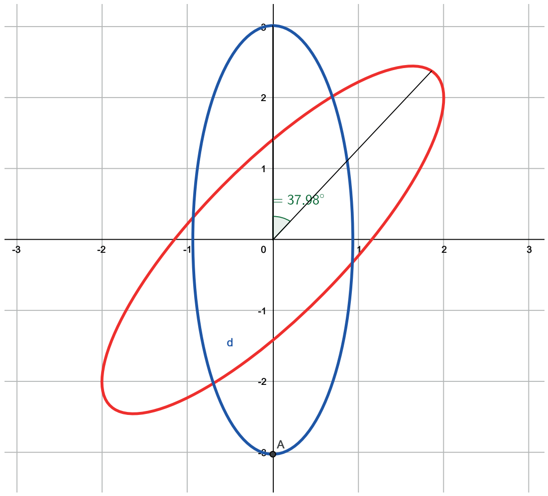
Así ya se tiene la ecuación de la cuadrática en el sistema $x'-y'$ que está rotado un ángulo θ respecto al sistema $x-y$, en este caso $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2=d$, es decir, que es una elipse con ecuación

$$\frac{5+\sqrt{17}}{2}x'^2+\frac{5-\sqrt{17}}{2}y'^2=3.$$

La Figura 28 presenta la transformación de la forma dada a una estándar. ¿Puede usted identificar cuál sería en la gráfica el sistema $x'-y'$ y cuál el sistema $x-y$?

En algunos casos se puede requerir determinar también el ángulo de rotación α en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Para esto existen varios métodos, uno de ellos se realiza a través de la matriz de rotación de la forma $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -sen\alpha\\ sen\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ con $0\le\alpha\le 2\pi$. Esta matriz fue estudiada en los ejemplos de la sección 13 sobre transformaciones lineales.

Figura 28. Resultado de la transformación de la forma cuadrática dada a una forma estándar.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

17.3.2. Segundo ejemplo. Modelación. Modelo de competencia: Bajo la suposición de que dos especies de animales ocupan un mismo ecosistema, son competidores por los mismos recursos (por ejemplo, una presa común, un espacio, un recurso -agua, petróleo-, personas, sujetos susceptibles de ser reclutados por diferentes agentes del conflicto, etc.) del sistema en el cual cohabitan. Si inicialmente se asumiera que solo una está presente (o en ausencia de la otra), la razón a la que cada población crece estaría dada, en el modelo poblacional más simple, siendo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ la cantidad de individuos de cada una de las especies, por $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = K_1 x_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = K_2 x_2(t) \end{cases}$, respectivamente.

Ahora bien, como las especies compiten por el mismo recurso, el modelo admite suponer que cada una de las razones a las que cambia una de ellas se reduzca por la existencia o presencia de la otra. Así el modelo toma la forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1(t) + bx_2(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = cx_1(t) + dx_2(t)$$

Donde b y c deben ser negativas.

De otra parte, si se tiene un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = cx_1(t) + dx_2(t) \end{cases}$ sujeto a las condiciones iniciales $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$, se puede demostrar que la solución al sistema $\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ puede escribirse como $\boldsymbol{v}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0$ donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que tiene como eigenvalores a λ_1 y λ_2 y como eigenvectores asociados $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$, y $e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1}$. En esta última expresión, C es una matriz cuyas columnas son los vectores propios de A, J es una matriz diagonal de los valores propios de A (es decir, de la forma $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ y e^{Jt} es una matriz de la forma $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$.

Como ilustración de este modelo, suponga que para un grupo de lobos (x_1) y de zorros (x_2) que compiten en un territorio por un recurso (por ejemplo, conejos) se tiene que las razones de cambio de las poblaciones correspondientes satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1(t) - 3x_2(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -3x_1(t) + 4x_2(t)$$

Si inicialmente en el ecosistema aislado (se supone que no existe un tercer competidor y que no entran ni salen individuos de las dos especies de este) estaba constituido por 100 lobos y 50 zorros, se debe encontrar la población de lobos y de zorros a largo plazo.

Solución:
En la discusión del modelo hay que interpretar la ecuación $\frac{dx_1}{dt} = 2x_1(t) - 3x_2(t)$ considerando que la tasa de cambio de la población de lobos con respecto al tiempo medido en años es equivalente a la tasa de natalidad de los lobos calculada para la población completa (200%, 2 lobos por año por cada lobo de la población actual) disminuida por la tasa de mortalidad provocada por la población de zorros existente (300%, 3 lobos por año por zorro por cada zorro de la población actual).

En este caso la matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y sus eigenvalores quedaran determinados por $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$ de donde, $\lambda_1 = 3+\sqrt{10}, \lambda_2 = 3-\sqrt{10}$. Con lo que $J = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{10} \end{pmatrix}$, y por tanto, e^{Jt} tiene la forma $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{(3+\sqrt{10})t} & 0 \\ 0 & e^{(3-\sqrt{10})t} \end{pmatrix}$.

Los eigenvectores asociados son:

Para $\lambda_1 = 3+\sqrt{10}$ se tiene $\left(\begin{array}{cc|c} 2-(3+\sqrt{10}) & -3 & 0 \\ -3 & 4-(3+\sqrt{10}) & 0 \end{array}\right)$, de donde $\left(\begin{array}{cc|c} -1-\sqrt{10} & -3 & 0 \\ -3 & 1-\sqrt{10} & 0 \end{array}\right)$ y llevando a la forma estándar se tiene que $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}-1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = 3-\sqrt{10}$ se tiene $\left(\begin{array}{cc|c} 2-(3-\sqrt{10}) & -3 & 0 \\ -3 & 4-(3-\sqrt{10}) & 0 \end{array}\right)$, con lo cual

$\left(\begin{array}{cc|c} -1+\sqrt{10} & -3 & 0 \\ -3 & 1+\sqrt{10} & 0 \end{array}\right)$ y llevando a la forma estándar se tiene que $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}+1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ y por tanto,

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}-1}{3} & \frac{\sqrt{10}+1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora determinando C^{-1}, por ejemplo, con la matriz adjunta como en la sección 3, se sabe que $C^{-1} = \frac{1}{|C|} adj\ C$, de modo que:

$$C^{-1} = \frac{-2\sqrt{10}}{3} \begin{pmatrix} \frac{9}{40} & \frac{-3\sqrt{10}}{40} - \frac{3}{40} \\ \frac{-9}{40} & \frac{-3\sqrt{10}}{40} + \frac{3}{40} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -3\sqrt{10} & 10+\sqrt{10} \\ 3\sqrt{10} & 10-\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Dado que $e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1}$ se tiene que:

$e^{At} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}-1}{3} & \frac{\sqrt{10}+1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(3+\sqrt{10})t} & 0 \\ 0 & e^{(3-\sqrt{10})t} \end{pmatrix} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -3\sqrt{10} & 10+\sqrt{10} \\ 3\sqrt{10} & 10-\sqrt{10} \end{pmatrix}$, al realizar las operaciones se tiene que:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{(10+\sqrt{10})e^{(3-\sqrt{10})t} + (10-\sqrt{10})e^{(3+\sqrt{10})t}}{20} & \frac{3\sqrt{10}(e^{(3-\sqrt{10})t} - e^{(3+\sqrt{10})t}}{20} \\ \frac{3\sqrt{10}(e^{(3-\sqrt{10})t} - e^{(3+\sqrt{10})t}}{20} & \frac{(10+\sqrt{10})e^{(3+\sqrt{10})t} + (10-\sqrt{10})e^{(3-\sqrt{10})t}}{20} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{At}\boldsymbol{x}_0$ entonces con $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} \frac{(10+\sqrt{10})e^{(3-\sqrt{10})t} + (10-\sqrt{10})e^{(3+\sqrt{10})t}}{20} & \frac{3\sqrt{10}(e^{(3-\sqrt{10})t} - e^{(3+\sqrt{10})t}}{20} \\ \frac{3\sqrt{10}(e^{(3-\sqrt{10})t} - e^{(3+\sqrt{10})t}}{20} & \frac{(10+\sqrt{10})e^{(3+\sqrt{10})t} + (10-\sqrt{10})e^{(3-\sqrt{10})t}}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.5\left[\left(\sqrt{10}+4\right)e^{(3-\sqrt{10})t} + \left(4-\sqrt{10}\right)e^{(3+\sqrt{10})t}\right] \\ 12.5\left[\left(\sqrt{10}+2\right)e^{(3-\sqrt{10})t} + \left(2-\sqrt{10}\right)e^{(3+\sqrt{10})t}\right] \end{pmatrix}$$

Finalmente, la población a largo plazo será:

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} 12.5\left[\left(\sqrt{10}+4\right)e^{(3-\sqrt{10})t} + \left(4-\sqrt{10}\right)e^{(3+\sqrt{10})t}\right] \\ 12.5\left[\left(\sqrt{10}+2\right)e^{(3-\sqrt{10})t} + \left(2-\sqrt{10}\right)e^{(3+\sqrt{10})t}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \infty \\ -\infty \end{pmatrix}$$

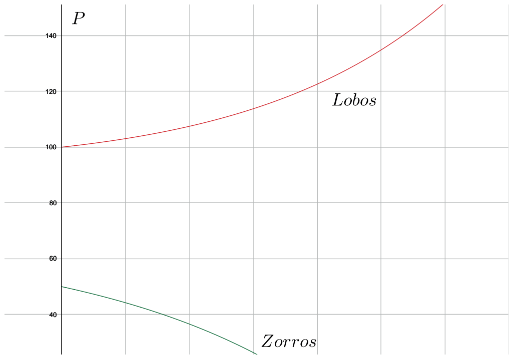
Sin embargo, las condiciones técnicas del modelo implican que $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$, lo que significa que a largo plazo dentro del modelo de competencia

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \infty \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, la población de lobos tenderá a crecer sin medida (posiblemente la población entrará a estar regulada por otros aspectos como la población disponible de presas u otros recursos), en tanto que la de zorros tenderá a desaparecer.

En la Figura 29 se representan las funciones de población de las dos especies del modelo.

Figura 29. Funciones de población de lobos y zorros.



Fuente: Elaboración propia con Geogebra Classic 5.0®

17.3.3. Tercer ejemplo. Modelación. La situación problema de este ejemplo está basada en el proceso jerárquico analítico como en Anderson et al. (Anderson, Sweeny, & Williams, 1998, págs. 752-753). Un comprador desea elegir entre tres modelos de teléfono celular en lo que se refiere a su capacidad de almacenamiento. Para la selección del modelo celular, el comprador escribió en un folleto promocional que el modelo A es moderadamente más preferido que el modelo B; el modelo A es poderosamente más preferido que el modelo C; el modelo B es de igual a moderadamente más preferido que C. Diseñe una matriz de comparación pareada para esta situación problema. Determine el vector de prioridades de los modelos de celular respecto al criterio de capacidad de almacenamiento. ¿Son consistentes los juicios del comprador?

Solución:

Conforme a la escala de comparación pareada de Saaty (Saaty 2008, 86), la tabla para los juicios es:

Teléfono celular	A	B	C
A	1	3	5
B	$\frac{1}{3}$	1	2
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1

Así la matriz de comparación pareada para el criterio de capacidad de almacenamiento de los teléfonos celulares es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Entonces los pasos para los juicios de sintetización son:

Paso 1: Los totales de las columnas son $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{23}{15}$; $3+1+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$; y $5+2+1=8$.

Paso 2: La matriz de comparación pareada normalizada es

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{23} & \frac{2}{3} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{23} & \frac{2}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{23} & \frac{1}{9} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Cálculo del vector de prioridad para la matriz de comparación pareada.

$A-\lambda I_3=\begin{pmatrix} \frac{15}{23}-\lambda & \frac{2}{3} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{23} & \frac{2}{9}-\lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{23} & \frac{1}{9} & \frac{1}{8}-\lambda \end{pmatrix}$. De aquí que $|A-\lambda I_3|=-\frac{1}{1656}(1656\lambda^3-1655\lambda^2-1)=0$

Al resolver la eigenecuación se obtiene que el único valor real es $\lambda=1$ porque los otros dos son complejos conjugados.

Con $\lambda = 1$, $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} \frac{-8}{23} & \frac{2}{3} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{23} & \frac{-7}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{23} & \frac{1}{9} & \frac{-7}{8} \end{pmatrix}$. Al encontrar la matriz escalonada reducida del sistema homogéneo se encuentra que $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{1081}{208} \\ \frac{369}{208} \\ 1 \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$. Para visualizar mejor la síntesis y las prioridades relativas se normalizará el vector dividiendo por la suma de sus componentes.

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0,6519 \\ 0,2225 \\ 0,1254 \end{pmatrix}$.

Este vector indica que el teléfono celular preferido es el A, con una prioridad de 0,6519; el segundo en preferencia es B, con una prioridad de 0,2225 y el tercero es C, con 0,1254 como prioridad.

Para saber si el comprador es consistente en sus juicios y sus preferencias no son producto de la confusión, se estima la relación de consistencia calculando el vector de sumas ponderadas.

Paso 1:

$$0,6519 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + 0,2225 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 0,1254 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7512 \\ 2,2412 \\ 3,8305 \end{pmatrix}$$

Paso 2:

Ahora, se dividen las entradas del vector de sumas ponderadas por los valores de prioridad correspondientes.

$$\frac{0,7512}{0,6519} = 1,1523; \frac{2,2412}{0,2225} = 10,0728; \frac{3,8305}{0,1254} = 30,5462$$

Paso 3. $\lambda_{\text{máx}} = \frac{1,1523 + 10,0728 + 30,5462}{3} = 20,7466$

Paso 4. $CI = \frac{20,7566 - 3}{2} = 8,8733$

Paso 5. $CR = \frac{CI}{RI} = \frac{8,8733}{0,58} = 15,29$ como $CR > 0,10$; los juicios del comprador no son consistentes, tal vez le hace falta más asesoría para conocer mejor las características de los teléfonos celulares.

17.4 Ejercicios guiados

17.4.1. Primer ejemplo. Modelación. Con base en el modelo de Leslie (Grossman, 1996, págs. 556-560), (Grossman, 1998, págs. 193-204), encuentre en un grupo de animales el número de hembras jóvenes y adultas después de 1,2,5,10,19 y 20 años. Obtenga después las relaciones a largo plazo de $p_{j,n}$ a $p_{a,n}$ y T_n a T_{n-1} (realice redondeo a cuatro decimales), dado que $\boldsymbol{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, $k = 6, \alpha = 0.4, \beta = 0,5.$

Empecemos el problema por interpretar la información, ¿Qué representa $\boldsymbol{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$?, ¿Cómo se entiende $k = 6, \alpha = 0.4$ y $\beta = 0,5$?

....

....

....

Recordemos que la matriz de tamaño 2×2, que representa parte del problema, está dada por $A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$; remplace los datos conocidos, ¿qué matriz obtiene?

....

....

....

Para hallar la población de hembras en un año, recordemos que debemos efectuar la operación $\boldsymbol{p}_1 = A\boldsymbol{p}_0$; remplace los datos que usted ya conoce y haga la simplificación, ¿Cuál es su resultado?, interprete este resultado en términos de población de jóvenes hembras y adultas en el primer año (recuerde que sus poblaciones jóvenes y adultas deben ser números enteros, por esto debe tomar el menor entero al valor que arroje la operación).

....

....

Para el segundo año, $\boldsymbol{p}_2 = A\boldsymbol{p}_1 = A\ A\boldsymbol{p}_0 = A^2\boldsymbol{p}_0$, simplifique esta expresión, ¿cuál es su resultado?, interprete este resultado.

....

....

....

Para el quinto año $\boldsymbol{p}_5 = A\boldsymbol{p}_4 = AA^4\boldsymbol{p}_0 = A^5\boldsymbol{p}_0$. Interprete este resultado en el contexto del modelo.

....

....

....

Repita el mismo proceso para así encontrar $\boldsymbol{p}_{10}$, $\boldsymbol{p}_{19}$ y $\boldsymbol{p}_{20}$, simplifique cada uno e interprete los resultados.

....

....

....

Con base en los resultados anteriores complete la siguiente tabla, esto le será de utilidad para estimar las relaciones a largo plazo de $p_{j,n}$ a $p_{a,n}$ y T_n a T_{n-1}.

Año n	**Número de jóvenes $p_{j,n}$**	**Número de adultas $p_{a,n}$**	**Población total de hembras T_n en el año n**	**$p_{j,n} / p_{a,n}$**	**T_n / T_{n-1}**
0	0	12	12	0	–
1					
2					
3					
10					
19					
20				*	**

Para estimar las relaciones a largo plazo de $p_{j,n}$ a $p_{a,n}$, tome el valor obtenido en la casilla marcada con el símbolo *. ¿Qué interpretación le da a este valor?

....

....

....

Para estimar las relaciones a largo plazo de T_n a T_{n-1}, tome el valor obtenido en la casilla **. ¿Qué interpretación le da a este valor?

....

....

Ahora para hallar estos valores reales estimados en las dos preguntas anteriores, proceda como se indica. Tomemos la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, ya con los valores dados desde el comienzo, para calcular la ecuación $|A-\lambda I|=0$, y resuelva en términos de λ, ¿cuáles son los eigenvalores obtenidos?

....

....

Compare estos valores obtenidos con **. ¿Qué puede asegurar al respecto?

....

....

Interprete el último valor obtenido comparable en términos de la población total de hembras (en términos de porcentaje).

....

....

Ahora tome el valor de λ (comparable con el valor de la tabla), y remplace en $(A-\lambda I)v=0$ (considere $v=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y resuelva el sistema homogéneo y parametrice la incógnita y, para así obtener una base para el sistema homogéneo. ¿Cuál es su resultado?

....

....

Compare el primer valor de la casilla a_{11} de su vector columna resultante del paso anterior con el valor obtenido de la tabla en la casilla *. ¿Qué puede afirmar?

....

....

Interprete el último valor obtenido en términos de la relación que guardan la población de jóvenes hembras con adultas hembras.

....

....

17.5. Ejercicios propuestos

Para los ejercicios propuestos considere el modelo de Leslie (Grossman, 1996, págs. 556-560), (Grossman, 1998, págs. 193-204).

17.5.1. Encuentre el número de hembras jóvenes y adultas después de 1,2,3,5,10,19 y 20 años. Obtenga después las relaciones a largo plazo de $p_{j,n}$ a $p_{a,n}$ y T_n a T_{n-1}. (Haga redondeo a cuatro decimales), dado que $\boldsymbol{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \end{pmatrix}$, $k = 4, \alpha = 0,7, \beta = 0,8$.

17.5.2. Encuentre el número de hembras jóvenes y adultas después de 1,2,3,5,10,19 y 20 años Obtenga después las relaciones a largo plazo de $p_{j,n}$ a $p_{a,n}$ y T_n a T_{n-1}. (Haga redondeo a cuatro decimales), dado que $\boldsymbol{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, $k = 2, \alpha = 0.2, \beta = 0,3$.

17.5.3. Suponga que las hembras de una población animal viven por término promedio 20 años y que esta población se divide en cuatro clases de edades iguales con intervalos de 5 años. Suponga que la matriz de crecimiento de Leslie viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

a_i = promedio número de hijas que tiene una hembra durante el tiempo que permanece en la clase de orden i,con $i = 1,2,3,4$

b_i = fracción de las hembras que se espera sobrevivan y pasen a la clase de orden $i + 1$,con $i = 1,2,3$

Suponga que: $a_1 = 0$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 2$. Además, suponga que $b_1 = 0,5$, $b_2 =$, $b_3 = 0,3$

Si inicialmente hay 10 hembras en la primera clase, 20 en la segunda, 25 en la tercera, 15 en la cuarta y 4 en la última clase, halle la evolución en los 5, 10 y 15 años próximos. (Observación: No olvide que cada ciclo comprende 5 años).

17.6. Preguntas de tipo Saber Pro

Al abordar el trabajo de solución de estas preguntas usted debe revisar cómo calcular los eigenvalores y eigenvectores de una matriz. Además debe recordar la interpretación geométrica asociada a los valores propios. En este apartado se utilizarán las aplicaciones de los eigenvalores y eigenvectores a tres casos particulares: el modelado poblacional, las secciones cónicas y las ecuaciones diferenciales.

17.6.1. Las preguntas 1 a 4 se refieren a la siguiente situación:

Una población de aves se puede modelar mediante la forma matricial $P_n = A^n P_o$, donde

$P_n = \begin{pmatrix} P_{j,n} \\ P_{a,n} \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} P_{j,0} \\ P_{a,0} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ con:

P_0: Población de inicial de hembras

$P_{j,0}$: Población inicial de hembras jóvenes

$P_{a,0}$: Población inicial de hembras adultas

P_n: Población de hembras en el periodo n de reproducción después del inicio

$P_{j,n}$: Población de hembras jóvenes en el periodo n de reproducción después del inicio

$P_{a,n}$: Población l de hembras adultas en el periodo n de reproducción después del inicio

k: Número de crías hembras promedio por cada hembra adulta

α: Proporción de hembras jóvenes que sobreviven de un periodo a otro

β: Proporción de hembras adultas que sobreviven de un periodo a otro

1) Si las proporciones de hembras adultas y jóvenes que sobreviven de un periodo a otro son 80% y 60% respectivamente, y cada hembra adulta da 3 hembras promedio en cada periodo entonces la matriz A tiene la forma:

A. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 80 & 60 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 60 & 80 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

2) Los valores propios asociados a A, redondeados a una cifra decimal, son:

A. $\lambda_1 = 82{,}2, \lambda_2 = -3{,}8$

B. $\lambda_1 = 63{,}7, \lambda_2 = -2{,}2$

C. $\lambda_1 = 1{,}9, \lambda_2 = -1{,}3$

D. $\lambda_1 = 1{,}8, \lambda_2 = -1$

3) La población total de hembras al cabo del cuarto periodo, si inicialmente se tenían 5 hembras jóvenes y 10 hembras adultas, es:

A. 98

B. 118

C. 198

D. 208

4) La razón del número de hembras jóvenes a hembras adultas a largo plazo tiende a:

A. 1
B. $\frac{4}{3}$
C. $\frac{5}{3}$
D. 2

Las preguntas 5 a 8 se refieren a la siguiente información.
Una forma cuadrática en dos variables es una expresión de la forma $ax^2+bxy+cy^2=d$ que a su vez puede interpretarse como una función de la forma

$$F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=d,$$

donde el término en xy indica que la cuadrática está rotada un ángulo θ respecto al sistema cartesiano.
Particularmente, en forma vectorial se puede reexpresar: como $F(x,y)=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b/2\\ b/2 & c\end{pmatrix}$.
Puede igualmente mostrarse que si λ_1 y λ_2 son los valores propios asociados a $\boldsymbol{A}$ entonces $ax^2+bxy+cy^2=d$ puede expresarse como $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2=d$ donde $x´$, $y´$ se refiere a un sistema de referencia en el cual la cuadrática no está rotada y, por tanto, su identificación es inmediata.

5) Si se tiene $x^2+3xy+2y^2=4$ entonces la matriz $\boldsymbol{A}$ asociada a la cuadrática es:

A. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}$

6) Los valores propios asociados a la matriz A para la cuadrática de punto anterior son:

A. $\lambda_1=\frac{3+\sqrt{10}}{2}, \lambda_2=\frac{3-\sqrt{10}}{2}$
B. $\lambda_1=\frac{-3+\sqrt{10}}{2}, \lambda_2=\frac{-3-\sqrt{10}}{2}$
C. $\lambda_1=\frac{3}{2}-\sqrt{2}, \lambda_2=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$
D. $\lambda_1=-\frac{3}{2}-\sqrt{2}, \lambda_2=-\frac{3}{2}-\sqrt{2}$

17.6.2. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta

En las siguientes preguntas:

Marque A si los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

Marque B si los enunciados 2 y 3 son verdaderos.

Marque C si los enunciados 3 y 4 son verdaderos.

Marque D si los enunciados 2 y 4 son verdaderos.

Marque E si los enunciados 1 y 3 son verdaderos.

7) Unos vectores propios de la matriz A para $x^2+3xy+2y^2=4$ son:

1. $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}-1}{3}\\ 1\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}+1}{3}\\ 1\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{10}+1}{3}\\ 1\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}-3}{3}\\ 1\end{pmatrix}$

8) $x^2+3xy+2y^2=4$ representa

1. $\frac{3+\sqrt{10}}{2}x'^2+\frac{3-\sqrt{10}}{2}y'^2=4$
2. Una elipse
3. Una hipérbola
4. $\frac{3+\sqrt{10}}{2}x'^2-\frac{3-\sqrt{10}}{2}y'^2=4$

Las preguntas 9 a 12 se refieren a la siguiente información: Si se tiene un sistema de dos ecuaciones diferenciales de la forma $\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=ax_1(t)+bx_2(t)\\ \frac{dx_2}{dt}=cx_1(t)+dx_2(t)\end{cases}$ sujeto a las condiciones iniciales $\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}$ se puede demostrar que la solución al sistema $\boldsymbol{v}(t)=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es $\boldsymbol{v}(t)=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=e^{At}x_0$ donde $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que tiene como valores propios λ_1 y λ_2 y como vectores propios asociados v_1 y v_2, y $e^{At}=Ce^{Jt}C^{-1}$.

Además C es una matriz cuyas columnas son los vectores propios de A, J es una matriz diagonal de los valores propios de A (es decir, de la forma $J=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ y e^{Jt} es una matriz de la forma $e^{Jt}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$.

Un modelo para la cantidad de sal presente en cualquier instante en dos tanques, inicialmente con un volumen de 50 galones cada uno y conectados entre sí, donde al primero de ellos entra agua pura a razón de 3 gal/min y sale mezcla homogénea de él hacia el segundo a razón de 4 gal/min; del segundo fluye mezcla hacia el exterior a razón de 3 gal/min y también regresa mezcla hacia el primero a razón de 1 gal/min, es de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-\dfrac{2}{25}x_1(t)+\dfrac{1}{50}x_2(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{2}{25}x_1(t)-\dfrac{2}{25}x_2(t) \end{cases}$$

Si se sabe que inicialmente en el primer tanque hay disueltas 25 lb de sal y el segundo tanque hay agua pura.

9) Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son:
   1. $\lambda=-\frac{3}{25}$
   2. $\lambda=-\frac{1}{25}$
   3. $\lambda=\frac{1}{25}$
   4. $\lambda=\frac{3}{25}$

10) Los vectores propios de $\boldsymbol{A}$ son:
   1. $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
   2. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
   3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   4. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

11) Los componentes de $v(t)$ satisfacen que:
   1. $x_1(t)=\frac{25}{2}e^{-\left(\frac{t}{25}\right)}+\frac{25}{2}e^{-\left(\frac{3t}{25}\right)}$
   2. $x_2(t)=25e^{-\left(\frac{t}{25}\right)}+\frac{25}{2}e^{-\left(\frac{3t}{25}\right)}$
   3. $x_2(t)=25e^{-\left(\frac{t}{25}\right)}-25e^{-\left(\frac{3t}{25}\right)}$
   4. $x_1(t)=25e^{-\left(\frac{t}{25}\right)}-\frac{25}{2}e^{-\left(\frac{3t}{25}\right)}$

12) Las soluciones x_1(t) y x_2(t) cumplen con:
   1. A largo plazo tiende a estabilizarse en 25 libras
   2. Inicialmente x_2 es creciente, pero a largo plazo decrece
   3. x_1 es decreciente
   4. A largo plazo tiende a estabilizarse en 12.5 libras

17.7. Recursos informáticos recomendados

1. Crecimiento de una población de pájaros https://youtu.be/uGmu9tynnEM (13:57)
2. Valores propios y aplicaciones (Cónicas) https://youtu.be/0WchXj8p30o (14:34)
3. Valores propios aplicación (Matriz de probabilidad) https://youtu.be/rguA57wyL18 (12:21)

18 TERCERA AUTOEVALUACIÓN

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON MÚLTIPLE RESPUESTA

En las siguientes preguntas:

Si 1 y 2 son correctas marque A.

Si 2 y 3 son correctas marque B.

Si 3 y 4 son correctas marque C.

Si 2 y 4 son correctas marque D.

Si 1 y 3 son correctas marque E.

1) Para el triángulo que tiene por lados las rectas que aparecen a continuación, es cierto que:

$$L_1: \langle x, y\rangle = \langle 1,2\rangle + t\langle -1,3\rangle, t \in \mathbb{R}$$
$$L_2: x = y - 2$$
$$L_3: y = 2$$

1. tiene área igual a 0.38 unidades cuadradas.
2. tiene área igual a 0.11 unidades cuadradas.
3. tiene perímetro igual a 2.85 unidades.
4. tiene perímetro igual a 1.23 unidades.

2) Dos soluciones no triviales para el sistema homogéneo $(-4I_3 - A)\boldsymbol{x} = 0$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ son:}$$

1. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
4. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Para $L: P_3 \to P_3$ la transformación lineal definida por $L(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a-b)x^3 + (c-d)x$

Se tiene que:

1. L invierte los vectores que pertenecen a $\langle\{x^3, x\}\rangle$.
2. El eigenespacio asociado a $\lambda = 0$ contiene todos los polinomios cuadráticos.
3. L anula los vectores de $\langle\{x^3 + x^2, x+1\}\rangle$.
4. L actúa como la transformación identidad para los vectores que pertenecen a $\langle\{x^3, x\}\rangle$.

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON ÚNICA RESPUESTA

4) Analizando el espacio nulo S del sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x-6y+4z=0 \\ -x+3y-2z=0 \end{cases}$$

es cierto que:

A. La solución es la trivial.
B. El sistema no tiene solución.
C. La solución es el plano $x-y+z=0$
D. Una base para el espacio nulo es $\{(3,1,0),(-2,0,1)\}$.

5) El paralelepípedo que tiene un vértice en el origen y lados $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ y $w=5i-j$ tiene volumen:

A. 20 unidades cúbicas.
B. 10 unidades cúbicas.
C. 3 unidades cúbicas.
D. 1 unidad cúbica.

6) En P_3, para los polinomios $\{1,x,x^2,x^3\}$ se puede afirmar que:

A. Son LD porque son 4 vectores en P_3.
B. Son LD porque son más vectores que $dimP_3$.
C. Son LI porque no forman una base para P_3
D. Son LI porque su wronskiano es 12.

TABLA DE RESPUESTAS

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					

PREGUNTAS ABIERTAS

7) Encuentre el polinomio cuadrático que interpole los puntos (−2,1), (5,6) y (1,7).

8) Para la transformación

$$T:\ \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ ?\ T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

a. Determine una base para $KerT$ y una base para ImT.
b. Encuentre nuT y $ranT$.
c. Verifique el teorema de la dimensión para T.
d. Encuentre los eigenvalores para la matriz dada.
e. Determine los eigenvectores asociados a los eigenvalores encontrados.
f. Interprete los eigenvalores para la transformación T.

19 FORMATO DE MODELACIÓN DESPRENDIBLE

1. Discusión del problema: Después de leer atentamente el problema, reinterprételo: parafraseando, comentando y explicando con sus propias palabras.

2. Definición de las incógnitas presentes en el modelo: incluya la descripción completa de las incógnitas y si es el caso, las unidades en que se miden.

3. Restricciones o limitaciones del problema: tenga en cuenta qué recursos limitados o constreñimientos están afectando el problema. Rotule las ecuaciones con frases que indiquen el recurso limitado. En caso de ser posible, incluya las unidades de medida.

4. Condiciones técnicas: Imponga condiciones a las incógnitas definidas para que sus valores cuantitativos tengan sentido dentro de la modelación.

5. Escoja el método con el que va a resolver el sistema (o el objeto matemático que represente la situación): Argumente la escogencia de este método.

6. Resuelva el sistema (o el objeto matemático que represente la situación): esto implica hacer los cálculos apropiados para encontrar la solución cuantitativa.

7. Validación de la solución: Ahora que ya tiene los valores cuantitativos, verifique que satisfagan las restricciones que diseñó y las condiciones técnicas que impuso.

8. Solución al modelo: Con sus palabras exprese la solución del modelo, es decir, contextualice los resultados que obtuvo.

20 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS Y A LAS PREGUNTAS DE TIPO SABER PRO

20.1. SECCIÓN 1: MATRICES, OPERACIONES Y PROPIEDADES

20.1.1. Respuestas a los ejercicios propuestos

3.5.1.

a. $x=3$, $y=-1$; b) $x=2$, $y=-5$.

3.5.2.

a. No es posible;

b. $\begin{pmatrix} 57 & -38 & 133 & 19 \\ -30 & 20 & -70 & -10 \end{pmatrix}$

c. No es posible;

d. No es posible

3.5.3.

a. $\begin{pmatrix} 286500 \\ 291000 \\ 235000 \end{pmatrix}$;

b. $\begin{pmatrix} 377500 \\ 390000 \\ 255000 \end{pmatrix}$;

c. Sí, para el domingo.

d. $\begin{pmatrix} 75 & 88 & 100 \\ 50 & 102 & 110 \\ 55 & 60 & 80 \end{pmatrix}$;

e. $\begin{pmatrix} 664000 \\ 681000 \\ 490000 \end{pmatrix}$;

f. 1835000

3.5.4.

a. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{pmatrix}$

3.5.5

a. $\begin{pmatrix} -16 & -21 & -5 \\ 10 & 1 & 37 \end{pmatrix}$

b. No es posible.

c. $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \frac{15}{2} & -30 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -44 & 21 & -118 \\ -30 & -3 & -48 \\ -20 & \frac{123}{2} & -151 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 8 & 11 & 6 \\ 9 & \frac{-147}{2} & -51 \end{pmatrix}$

3.5.6.

a. $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 20 \end{pmatrix}$

3.5.7.

a. $\begin{pmatrix} 7/16 \\ 9/16 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$

3.5.8.

a. Infinitas;

b. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, donde $a, b\mathbb{R}$

3.5.9. $k = \pm \frac{\sqrt{59}}{59}$

3.5.10. Pedro tenía en su alcancía 180 monedas de 1000 pesos y 220 monedas de 500 pesos.

20.1.2. Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro.

1. Clave: D. Es una pregunta teórica donde debe recordar la definición de traza $Tr(A)$ como la suma de los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada de orden n, en este caso se tiene $(1+0-3) = -2$
2. Clave: C
3. Clave: B. Es una pregunta teórica en la que es importante tener claro el significado de la condición de necesario en matemáticas. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ satisfacen que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde no se requiere que ninguna de las matrices sea nula, ni que siquiera alguno de los elementos sea nulo (con lo que no se necesita que alguna fila o columna tenga solo ceros).
4. Clave: A
5. Clave: A. la pregunta apunta a propiedades de la matriz y usted ya puede descartar la B y la D si emplea la propiedad de la transpuesta (cambio de filas por columnas) y que toda matriz multiplicada por la matriz identidad da la propia matriz, respectivamente. Así sólo quedan como viables las claves A y C, y cualquiera de ellas puede verificarse o descartarse haciendo solo la operación del elemento resultante de la operación dada correspondiente al elemento $r_{1,1}$.
6. Clave: C
7. Clave: D
8. Clave: E. Se debe identificar que A es triangular superior así su transpuesta es triangular inferior y la opción 2 se descarta fácilmente de la definición de traza. Debe además se hace uso de que $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$ donde $\frac{1}{2}(A + A^T)$ es simétrica y $\frac{1}{2}(A - A^T)$ es antisimétrica con lo que basta calcular un componente no nulo de una de estas y que además no esté sobre la diagonal.
9. Clave: A
10. Clave: E. El ejercicio requiere inicialmente el proceso completo. Se debe aplicar la definición de combinación lineal. C será una combinación lineal de A y B si existen α y β | tal que $\alpha A + \beta B = C$. Sin embargo, con solo realizar un par de elementos es suficiente pues se tiene un sistema de dos incógnitas. Así $3\alpha - \beta = 0$ y $0\alpha - \beta = 3$, de donde $\beta = -3$ y $\alpha = -1$
11. Clave: D
12. Clave: E
13. Clave: E
14. Clave: C

20.2. SECCIÓN 2: DETERMINANTES Y PROPIEDADES

20.2.1 Respuestas a los ejercicios propuestos

4.5.1. $x = 1/2$, $x = 1$.

4.5.2. a. 320; b. 5; c. −30; d. −10.

4.5.3. a. −25; b. −144; c. 72.

4.5.4. a. Verdadero; b. Falso; c. Verdadero.

20.2.2 Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

1) Clave: B. Es una pregunta teórica donde puede emplear Sarrus o los menores y cofactores para resolverlo. Se presentan las dos soluciones:

   a. Sarrus: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{matrix}$

   $$= 0 + 15 + 16 - 36 + 2 - 0 = -3$$

   b. Menores y cofactores (usando la segunda columna) se tiene

   $$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$
   $$= 3(-12 + 5) - 2(-1 - 8) = -21 + 18 = -3$$

2) Clave: C
3) Clave: B. Pregunta teórica donde es importante tener claro el significado de la condición de **necesario** en matemáticas. Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ satisfacen que $|A| = 0$ y $|B| = 0$, donde no se requiere que sean matrices nulas, ni que siquiera alguno de los elementos sea nulo (con lo que no se necesita que alguna fila o columna tenga solo ceros o sea totalmente nula).
4) Clave: C
5) Clave: D. La pregunta apunta a propiedades de los determinantes y usted debería empezar por evaluar cada uno de los determinantes de las matrices dadas. En este caso $|A| = 0$ y $|B| = \frac{3}{2}$. De las propiedades de los determinantes se tiene $|AB| = 0$.
6) Clave: E
7) Clave: D. Se debe identificar que A es triangular superior, así que por propiedades su determinante es el producto de los elementos sobre su diagonal, en este caso $|A| = -1$. Y usando propiedades de los determinantes de la transpuesta y del producto se tiene que las afirmaciones 2 y 4 son verdaderas.
8) Clave: D
9) Clave: B. Se debe calcular $|A|$ ya sea por Sarrus o por menor y cofactores. En este caso $|A| = 7$ y se aplican las propiedades de los determinantes.
10) Clave: C. Hay otro valor que no está en las opciones y que lo satisface. ¿Cuál es?
11) Clave: B. Basta con plantear la ecuación propuesta $|A| - |B| = 0$. En este caso, $k^2 + k - 2 - (-k^2 - k - 2) = 0$ que se reduce a $2k(k+1) = 0$, con lo que $k = 0$, $k = -1$
12) Clave: C

20.3 SECCIÓN 3: REGLA DE CRAMER Y MATRIZ INVERSA

20.3.1 Respuestas a los ejercicios propuestos

5.5.1 En la empresa Transmilenio en el portal sur ingresaron en promedio 2.855 usuarios en el horario de 6 a.m., 1.220 usuarios promedio a la 1 p.m. y 2.930 usuarios promedio a las 6 p.m. Los ingresos promedio a las 6 a.m. fueron de 6.281.000, los ingresos promedio a las 1 p.m. fueron de 2.684.000 y los ingresos promedio a las 6 p.m. fueron de 6.446.000. Además, el promedio total de ingresos en las tres franjas fue de 15.411.000.

5.5.2 La multinacional L puede fabricar 2000 unidades de fragancia manzana, 3500 unidades de fragancia lavanda y 2500 unidades de fragancia limón.

5.5.3 La empresa de productos de Odontología Sonrisa Feliz debe invertir 3 millones en EE.UU., 1.5 millones en Alemania y 3.5 millones en Chile.

5.5.4 En el primer año la empresa de muebles debe invertir 4.8 millones en sillas para escritorio, 2.6 millones para sillas para comedor y 1.6 millones para sillas para restaurante.

5.5.5 Las notas del estudiante fueron 2.5 en el primer corte, 2.8 en el segundo corte y 3.7 en el tercer corte. En efecto, al promediar las notas el estudiante sí aprobó álgebra lineal.

5.5.6 El polinomio cuadrático es $p(x)=3x^2-3x+1$.

5.5.7 La descomposición es $\frac{-3}{x}+\frac{4}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$.

20.3.2 Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

1) Clave: B. Es una pregunta teórica donde se debe emplear propiedades del determinante de una matriz y su inversa si esta no es singular, $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ se puede calcular por Sarrus. Así $|A^{-1}|=-\frac{1}{3}$
2) Clave: C
3) Clave: C. Pregunta teórica, apunta a la condición de necesario en matemáticas en relación con cuándo es invertible una matriz. Por ejemplo, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ satisfacen que $|A|=0$ y $|B|=0$, luego son singulares y, por tanto, no son invertibles y no se requiere que sean matrices nulas, ni que siquiera alguno de los elementos sea nulo (con lo que no se necesita que alguna fila o columna tenga solo ceros o sea totalmente nula).
4) Clave: D
5) Clave: D. La pregunta es teórica sobre el proceso de solución de sistemas de ecuaciones por Cramer. Recuerde que en el denominador va el determinante de los coeficientes de las variables una vez este está ordenado y en el numerador se calcula el determinante de la variable que consiste en sustituir, en el determinante del sistema, la columna de la variable correspondiente por la de los términos independientes.
6) Clave: E
7) Clave: A. Se debe identificar que A es triangular superior, por lo que $|A|=-3$. Y usando propiedades de los determinantes de la inversa y de la forma matricial de un sistema, se tiene que las afirmaciones 1 y 2 son verdaderas.
8) Clave: B
9) Clave: A. Se tiene que el determinante del sistema es $\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 5 & 6 & -1\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}=-12$ luego el sistema tiene solución, así

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 5 & 13 & -1\\ 4 & 8 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 5 & 6 & -1\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}}=5 \quad \text{y} \quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -3 & -3\\ 5 & 6 & 13\\ 4 & -1 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 5 & 6 & -1\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}}=7$$

10) Clave: C. Hay otro valor que no está en las opciones y que lo satisface, ¿cuál es?
11) Clave: D. Se calcula primero $|A|$. Se descarta 1, pues el $|A|=8$, así $det(A^{-1})=\frac{1}{8}$ y por propiedades de los determinantes de un producto y de la multiplicación por un escalar, se descarta 3. Justifique las otras.
12) Clave: D
13) Clave B. El sistema por resolver es: Siendo
x:= precio por kilogramo aguacate Lorena
y:= precio por kilogramo aguacate Hass extra

z:= precio por kilogramo aguacate Hass de primera

$$\begin{cases} 10x+30y+20z=210000 \\ 15x+18y+14z=151000 \\ 10x+20y+20z=170000 \end{cases}$$

Con $x,y,z \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Recuerde que siempre es conveniente simplificar los coeficientes del sistema, de ser posible. Así, el sistema anterior resulta más simple si se reescribe como:

$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 21000 \\ 15x+18y+14z &= 151000 \\ x+2y+2z &= 17000 \end{aligned}$$

La solución lleva a que $x=2000$, con lo cual las opciones 1 y 4 quedan descartadas. Proceso terminado.

5.5 SECCIÓN 4: ELIMINACIÓN DE GAUSS Y ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

5.5.2. Respuestas a los ejercicios propuestos

6.5.1. Diariamente aprovechando toda la capacidad de las plantas, se producen un total de 220 camisetas de los tres estilos, de las cuales 100 son de tipo polo, 70 son de manga corta y 50 de manga larga.

6.5.2. No es posible satisfacer la expectativa de rendimiento del cliente con estos portafolios de inversión. El sistema de ecuaciones que modela la situación tiene solución, pero el valor obtenido para la inversión en el portafolio de alto riesgo es negativo y este no satisface las condiciones técnicas.

6.5.3. Se deben producir 50 hojaldres de bocadillo, 110 unidades de hojaldres de queso y 85 unidades de hojaldres de arequipe para emplear las horas disponibles de cada horno.

6.5.4. $x_1=-\frac{11}{2}+12t,\ x_2=\frac{11}{2}-9t,\ x_3=\frac{5}{2}-5t,\ x_4=t,$ $t\in\mathbb{R}$.

6.5.5. a) $a\neq\pm 1$; b) $a=1$; c) No existe ninguno.

6.5.6. a) $a\neq\pm 1$; b) $a=1$; c) $a=-1$

5.5.3. Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

1) Clave: D. Se debe tener en cuenta que si tiene infinitas soluciones, entonces las dos deben representar geométricamente la misma recta. Así como los coeficientes de x_1 son iguales, entonces basta con que $a=3$ (términos independientes). Note que también se debe cumplir que $(a^2-8)=1$, con lo que $a=3$ o $a=-3$ pero esta última no garantiza la igualdad de los términos independientes (lo que implica tener el mimo punto de corte con el eje y).
2) Clave: C
3) Clave: B. Como $(x_1,x_2)=(-\frac{3}{5},\frac{2}{5})$ es solución, entonces se sustituyen en el sistema (si es solución lo satisfacen) y ahora se tiene un sistema 2×2 donde las incógnitas son a y b. Así,

$$\begin{cases} -\frac{6}{5}a-\frac{6}{5}(b-1)=0 \\ -\frac{3}{5}(3a-1)+\frac{4}{5}b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{6}{5}a-\frac{6}{5}b+\frac{6}{5}=0 \\ -\frac{9}{5}a+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}b=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -9a+4b=17 \end{cases}$$

Que resolviendo el sistema (podría hacerlo por un método convencional y contrastar con la reducción por Gauss-Jordan de la matriz aumentada) lleva a $a=-1$.

4) Clave: D
5) Clave: D. Es una pregunta que solo busca determinar si tiene claro cuál es el orden en que debe estar escrito el sistema para construir la matriz aumentada del sistema. La estructura de

cada una de las ecuaciones <u>debe</u> ser de la forma $ax_1 + bx_2 + cx_3 + \cdots = d$. Así, es reescribir cada una de las ecuaciones en esa forma.

6) Clave: A

7) Clave: B. Se debe identificar que la matriz de coeficientes es triangular superior, tiene determinante -1 y su forma es afín a una escalonada. En la última fila debe leerse $-x_3 = 1$, con lo que y yendo hacia atrás (hacia arriba en las filas) se tiene que $x_2 = 0$, $x_1 = 2$. Luego la solución es única y la matriz es reductible mediante operaciones de filas a una escalonada reducida.

8) Clave: D

9) Clave: E. Se reduce la matriz ampliada ya sea a escalonada o a escalonada reducida. Aquí se presenta solo a escalonada. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 13 \\ 4 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right)$

$$-5F_1 + F_2 \to F_2; -4F_1 + F_3 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 21 & -11 & 28 \\ 0 & 11 & -5 & 20 \end{array}\right),$$

$$\frac{1}{21}F_2 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 21 & -11 & 28 \\ 0 & 11 & -5 & 20 \end{array}\right)$$

$$-11F_2 + F_3 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{21} & \frac{4}{3} \\ 0 & 11 & -5 & 20 \end{array}\right).$$

Así, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{21} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{16}{21} & \frac{16}{3} \end{array}\right)$

Que ya tiene una forma afín a la escalonada. Y de la última fila $\frac{16}{21}z = \frac{16}{3}$, de donde $z = 7$ y en la penúltima fila $y - \frac{11}{21}(7) = \frac{4}{3}$, de donde $y = 5$, y en la primera fila $x = -3 + 3y - 2z$ y sustituyendo $x = -2$

10) Clave: D.

5.6. SECCIÓN 5: PRIMERA AUTOEVALUACIÓN

5.6.2. Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro.

Tabla de Respuestas

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	■				
2				■	
3		■			
4			■		
5		■			
6				■	

5.6.3. Respuestas a las preguntas abiertas.

En estas preguntas debe escribir todo el procedimiento para el planteamiento de modelos o de situaciones problema. Hay que usar métodos de solución estandarizados y no el ensayo y error.

Solución al ejercicio 7:

En este ejercicio preguntan por cada una de las corrientes en las redes 1, 2 y 3. El sistema correspondiente ya está planteado y este es

$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 2 \\ I_1 - I_2 + 4I_3 = 0 \\ -I_1 + 4I_2 = 9 \end{cases}$ donde $I_i, i = 1,2,3$. Las condiciones técnicas son I_i pueden ser positivos, negativos o cero. El cero se interpreta como la ausencia de movimiento de cargas. Así, se decide usar la regla de Cramer por su eficiencia, para lo cual se encuentra $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -17 \neq 0.$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 9 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{-17} = -0,76; I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 9 & 0 \end{vmatrix}}{-17} = 2,05 \text{ e}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 9 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{-17} = 0,70$$

De donde se obtiene que las intensidades de las corrientes son –0,76, 2,05 y 0,70 por las redes 1, 2 y 3, respectivamente.

Solución al ejercicio 8:

En esta situación problema debemos encontrar dos escalares A y B de tal manera que al efectuar las operaciones de la derecha se produzca la fracción algebraica de la izquierda. Por lo cual,

$$\begin{aligned} \frac{3x-9}{x^2-2x-15} &= \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3} \\ &= \frac{A(x+3)+B(x-5)}{(x-5)(x+3)} \\ &= \frac{(A+B)x+(3A-5B)}{(x-5)(x+3)} \end{aligned}$$

Al comparar las fracciones algebraicas se observa que los denominadores son equivalentes, solo que uno está escrito como un polinomio y otro está factorizado. También se ve que para que los numeradores coincidan, los coeficientes deben ser iguales:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 3A-5B=-9 \end{cases}$$

Este sistema fue resuelto por sustitución porque es 2×2, no vale la pena intentar métodos más sofisticados. Se encontró que $A=\frac{3}{4}$ y $B=\frac{4}{9}$. La descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{3x-9}{x^2-2x-15} = \frac{\frac{3}{4}}{x-5} + \frac{\frac{9}{4}}{x+3}$$

5.7. SECCIÓN 6: VECTORES EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$, OPERACIONES Y PROPIEDADES

5.7.2. Respuestas a los ejercicios propuestos

8.5.1. Hay dos valores que lo satisfacen: $a=-3$, y $a=21$.

8.5.2. a. $\boldsymbol{w}=\langle -\frac{1}{2}, -\frac{13}{2}\rangle$; b. $\boldsymbol{w}=\langle 7,-19\rangle$.

8.5.3. La magnitud de la fuerza resultante es 192,37 N, dirección 84,54°.

8.5.4. Vectores tangentes unitarios a la curva en P, son $\boldsymbol{u}_1=\langle -\sqrt{3}/2, 1/2\rangle$, $\boldsymbol{u}_2=\langle \sqrt{3}/2, -1/2\rangle$, vector normal a la curva en el punto P es $\boldsymbol{v}=\langle 1/2, \sqrt{3}/2\rangle$.

8.5.5. $a=1/2$ y $b=2$

8.5.6.

a. $d(P,Q)=2\sqrt{13}$;

b. $\langle 4,-6\rangle$;

c. $\boldsymbol{u}=\left\langle \frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{3\sqrt{13}}{13}\right\rangle$

8.5.7.

a. $d(P,Q)=\sqrt{19}$;

b. $\langle -1,3,3\rangle$;

c. $\boldsymbol{u}=\left\langle -\frac{\sqrt{19}}{19}, \frac{3\sqrt{19}}{19}, \frac{3\sqrt{19}}{19}\right\rangle$

5.7.3. Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

1) Clave: D. Es una pregunta teórica donde se debe emplear la definición de un vector en el espacio (que aplica también para el plano) como una diferencia de coordenadas dirigida. En este caso $\overrightarrow{PQ}$ está determinado por $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ donde $O=(0,0,0)$ que equivale a restar vectorialmente la "posición final" y la inicial. En este caso,

$$\overrightarrow{PQ}=\langle -1-2, 2-2, -1-(-1)\rangle = \langle -3,0,0\rangle$$

2) Clave: C

3) Clave: A. Pregunta teórica, se debe recordar que si se tienen puntos en el plano $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, $R(x_3,y_3)$, entonces el área A del triángulo PQR está dada por $A=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right\|$. En este punto es importante que usted revise otras formas de calcular el área de un triángulo.
4) Clave: B
5) Clave: C. La pregunta toca un aspecto simbólico de los vectores y sus formas de notación matemática. La notación es un aspecto relevante no solo de la escritura en matemáticas sino de la comprensión de los objetos. En particular en las ciencias físicas y de la ingeniería se usan varias representaciones simbólicas de un objeto. En este caso la simbología empleada en C es inadecuada, pues resulta redundante.
6) Clave: C
7) Clave: D. Al identificar $\boldsymbol{r}(3)=\langle 8,10\rangle, \boldsymbol{r}(1)=\langle 2,2\rangle$, se tiene $\boldsymbol{r}(3)-\boldsymbol{r}(1)=\langle 6,8\rangle$ y que al ser r el vector posición entonces su derivada es el vector velocidad (y su segunda derivada será el vector aceleración), así $\boldsymbol{r}'(t)=\langle 3,2t\rangle$ que como se nota, implica que la componente en dirección del eje x es constante pues no depende del tiempo.
8) Clave: B
9) Clave: B. Se tiene que $f'(x)=2x$ y por tanto, la pendiente de la tangente es $f'(0)=0$ y el vector tangente unitario estará en dirección horizontal en este caso $\langle 1,0\rangle$, y $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ y la pendiente en $x=0$ será g´ $g'(0)=\frac{1}{2}$ y un vector en dirección de la tangente será $\boldsymbol{t}=\langle 2,1\rangle$ y aplicando la definición de vector unitario se tiene que $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{t}}{\|\boldsymbol{t}\|}=\left\langle \frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle=\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$ y el ángulo entre los vectores tangentes será $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
10) Clave: D.
11) Clave: E. Se tiene que $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_4=0$ entonces: $\langle -1+1-2+a,1-2-1+b\rangle=\langle 0,0\rangle$, luego $\langle -2+a,-2+b\rangle=\langle 0,0\rangle$ de donde $\langle a,b\rangle=\langle 2,2\rangle$ y por tanto, F_4 forma un ángulo de $\theta=45°$ con el eje x y $\|\boldsymbol{F}_4\|=2\sqrt{2}$.
12) Clave: A

5.8. SECCIÓN 7: PRODUCTO PUNTO Y PRODUCTO CRUZ CON APLICACIONES

8.8.2 Respuestas a los ejercicios propuestos

9.5.1. a. $\overline{PQ}=6$, $\overline{PR}=6{,}557$ y $\overline{QR}=3{,}316$; b. 9,9 aproximadamente; c. 30,2°,65,6° y 84,2°.

9.5.2. a. $\langle 71,-41,53\rangle$; b. $-\frac{10}{41}\langle 6,-2,1\rangle$; c. 87, este valor es el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores.

9.5.3. Sí, de hecho, tiene infinitas soluciones.

9.5.4. $\frac{31}{4}$ unidades cúbicas.

9.5.5. $\boldsymbol{w}=\langle 28,-8,17\rangle$ o $\boldsymbol{w}=\langle -28,8,-17\rangle$

9.5.6. $\frac{1}{6}\sqrt{10526}\,\boldsymbol{u}^2 \simeq 17{,}1$ unidades cuadradas.

9.5.7. Los cosenos directores son $\cos\alpha=\frac{9}{\sqrt{94}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{94}}, \cos\gamma=\frac{-3}{\sqrt{94}}$ y los ángulos directores son $\alpha=21{,}83°$, $\beta=78{,}09°$, $\gamma=108{,}02°$.

5.8.3. Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

1) Clave: D. Para el vector $\boldsymbol{u}=\langle -2,k-1,2\rangle$, ninguna de sus componentes es nula y $\cos\gamma=\frac{2}{3}$ entonces $\cos\gamma=\frac{u_3}{\|\boldsymbol{u}\|}=\frac{2}{3}$ de donde se debe cumplir que $\|\boldsymbol{u}\|=3$ y el $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$.
Como $\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{4+(k-1)^2+4}=3$ y por lo tanto $8+k^2-2k+1=9$ que equivale a la ecuación cuadrática $k^2-2k=0$ es decir que $k(k-2)=0$, lo que implica que $k=0$ o $k=2$. Si $k=2$ entonces $a_2=k-1=1$, con lo cual $\cos\beta=\frac{u_2}{\|\boldsymbol{u}\|}=\frac{1}{3}$, pero

esta opción no estra en los reactivos. Si $k=0$, $a_2 = k-1 = -1$ y por lo tanto $\cos\beta = \frac{u_2}{\|u\|} = -\frac{1}{3}$.

2) Clave: C.
3) Clave: C. Una simple inspección muestra que las componentes en x de los vectores u y w múltiplos, lo que sugiere paralelos que son paralelos y en un factor $-\frac{1}{9}$ así las componentes en y deben estar en la misma proporción con lo que $m = -\frac{1}{9}(-2) = \frac{2}{9}$.
4) Clave: C.
5) Clave: A.
6) Clave: E.
7) Clave: C. Se tiene que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$, donde $\theta = \frac{\pi}{3}\|\boldsymbol{u}\| = 3, \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2+\beta^2}$ y además $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 3-2\beta$. Por lo tanto $3-2\beta = 3\sqrt{2+\beta^2}\cos\frac{\pi}{3}$, que equivale a $3-2\beta = 3\sqrt{2+\beta^2}(\frac{1}{2})$ y elevando al cuadrado se obtiene: $(3-2\beta)^2 = \frac{9}{4}(2+\beta^2)$, desarrollando el cuadrado y llevándola a la forma general de la cuadrática se tiene: $7\beta^2 - 48\beta + 18 = 0$ y aplicando la fórmula general $\beta = \frac{3(8\pm 5\sqrt{2})}{7}$, se tiene que los vectores $\boldsymbol{u} = \langle 1,-2,-2\rangle$ y $\boldsymbol{v} = \langle 1,\beta,-1\rangle$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}rad$ entonces los posibles valores de β son $\beta = \frac{3(8+5\sqrt{2})}{7}$ y $\beta = \frac{3(8-5\sqrt{2})}{7}$.
8) Clave: B.
9) Clave: B. Si $Proy_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = Proy_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ se encuentra que $\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v}$ que se cumple si $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$. Esto último implica que u es perpendicular, $\boldsymbol{u}$ ortogonal, con $\boldsymbol{v}$. O bien que $\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^2} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$ lo cual sólo se cumple si $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.
10) Clave: E.
11) Clave: E. Las preguntas 11 a 13 se sustentan en la teoría de las operaciones bien definidas entre vectores y el resultado de estas. Así, la suma o diferencia de vectores da un vector, el producto punto se realiza entre vectores y su resultado es un escalar, y el producto cruz o interno entre vectores da como resultado un vector. Adicionalmente se pueden sumar cantidades de la misma naturaleza, esto es, escalares con escalares y vectores con vectores. Usted debe analizar cada uno de los términos de la operación planteada y ver si en conjunto está bien definida o no.
12) Clave: D.
13) Clave E. Ver la explicación del punto 11.
14) Clave: D

5.9. SECCIÓN 8: ECUACIÓN DE LA RECTA Y EL PLANO

5.9.2 Respuestas a los ejercicios propuestos

10.5.1. 13x-24y-2z=-44.

10.5.2. $x = 1+3t,\ y = 3-6t,\ z = 2+4t,\ t\in\mathbb{R}$.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{4}$$

10.5.3. $x = \frac{33}{19} + \frac{1}{38}t,\ y = \frac{2}{19} + \frac{11}{38}t,\ z = t,\ t\in\mathbb{R}$.114.45°.

10.5.4. 4.17 aproximadamente.

10.5.5. $4x - 12y + z = 14$. 1,84, aproximadamente.

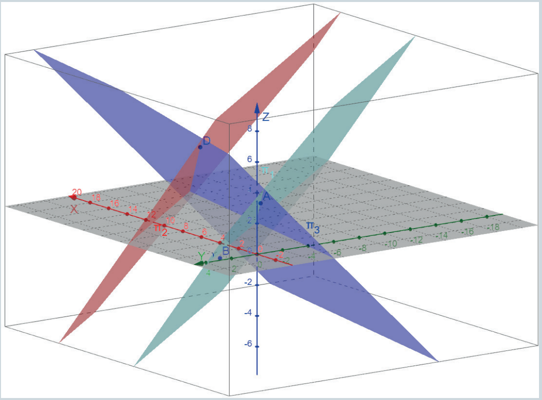
10.5.6. $6x + y + 9z = -20$.

10.5.7. $x = 1+6s,\ y = 2-3s,\ z = -3-3s,\ s\in\mathbb{R}$. Las rectas no se intersecan.

10.5.8. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{5}$.

$x = 1-12t,\ y = 1+4t,\ z = 5-4t,\ t\in\mathbb{R}$.

10.5.9. La gráfica correspondiente a la respuesta es



Los planos son $22x+18y+21z=245$ y $12x+67y-70z=-265$

10.5.10. $60u^3$.

10.5.11. $c=-5/3$.

10.5.12. $z=-1,\ y=7$.

10.5.13. $10x+2y+9z=-98$.

10.5.14. Los únicos puntos ubicados en la recta dada son P y R.

5.9.3. Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

1) Clave: C. Los vectores directores de las rectas son $\boldsymbol{u}=\langle 2,1,4\rangle$ y $\boldsymbol{v}=\langle 1,2,3\rangle$ respectivamente, y por tanto, empleando el producto escalar entre los vectores se determina el ángulo θ entre las rectas. Así, $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$. Como $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=2+2+12=16$; $\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{4+1+16}=\sqrt{21}$; $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$, entonces $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}\right)$.
   Luego, $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{16}{\sqrt{21}\sqrt{14}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{16}{7\sqrt{6}}\right)$.
2) Clave: A
3) Clave: B. Los vectores normales de los planos son $\boldsymbol{n}_1=\langle 1,1,0\rangle$ y $\boldsymbol{n}_2=\langle 2,1,-2\rangle$. Con el producto escalar entre los vectores se determina el ángulo θ entre los planos con $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{\|\boldsymbol{n}_1\|\|\boldsymbol{n}_2\|}$.
   Ahora, $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=3$, $\|\boldsymbol{n}_1\|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ y $\|\boldsymbol{n}_2\|=\sqrt{4+1+4}=3$.
   Entonces $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{2}3}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.
4) Clave: B
5) Clave: D. El plano buscado es paralelo al plano dado, y por esto, sus vectores normales son múltiplos escalares uno del otro. En particular, se asume que es el mismo en este caso $\boldsymbol{n}=\langle 2,3,4\rangle$ y dado que debe pasar por $(1,-2,3)$, entonces la ecuación escalar del plano es $2(x-1)+3(y+2)+4(z-3)=0$ y desarrollando se obtiene: $2x+3y+4z=8$.
6) Clave: A
7) Clave: E. Hay varias formas de proceder en este caso. Por ejemplo, como la recta está en los dos planos, debe satisfacer el sistema cuya forma matricial ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & -2 & 15 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right)$ llevándola a la forma escalonada reducida (realice manualmente los pasos) se obtiene $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{14}{15} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{15} & -1 \end{array}\right)$.
   Una parametrización inicial sugiere que $z=r, y-\frac{2}{15}r=-1, x-\frac{14}{15}z=3$. Sin embargo, reparametrizando convenientemente para evitar los fraccionarios se puede hacer que $z=15t$, con lo que $y-2t=-1, x-14t=3$. Es decir, $x=3+14t, y=-1+2t, z=15t$.
   Ahora, escribiendo la ecuación en la forma simétrica (eliminando el parámetro t) se obtiene: $\frac{x-3}{14}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{15}$. Como se mencionó, existen otras vías; realice por lo menos una más.
8) Clave: E
9) Clave: B. Nuevamente hay varias posibilidades de solución. Sean $P(1,-2,0)$ y $Q(-2,0,-1)$, entonces un vector en dirección de la recta será $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{PQ}$. En

este caso, $\boldsymbol{u} = \langle -3, 2, -1 \rangle$ y por tanto, la ecuación de la recta será, utilizando: $\langle x, y, z \rangle = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{u}$, con $\boldsymbol{r}_0 = \langle 1, -2, 0 \rangle$, $\langle x, y, z \rangle = \langle 1, -2, 0 \rangle + t\langle -3, 2, -1 \rangle$. Lo anterior implica que, $x = 1 - 3t$, $y = -2 + 2t$, $z = -t$. Reparametrizando con $s = -t$, con lo que

$$x = 1 + 3s,\ y = -2 - 2s,\ z = s.$$

La forma simétrica $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = z$, se obtiene eliminado el parámetro s. Aquí se debe resaltar cómo los procesos de parametrización o de escogencia de los vectores no son únicos y usted debe estar muy atento a lo que esto significa en el manejo de los coeficientes de las variables. Nuevamente intente probar otras vías de solución.

10) Clave: A (Una inspección simple le permite descartar las otras opciones ¿Por qué?)
11) Clave: D. Las preguntas 11 a 13 se sustentan en una comprensión de las condiciones para definir adecuadamente rectas y planos en el espacio. Aquí es de vital importancia tener claridad en los requerimientos (condiciones suficientes y necesarias) de una definición y la diferencia entre rectas paralelas, perpendiculares y alabeadas que se pueden presentar en $\mathbb{R}^3$. Particularmente en esta pregunta en $\mathbb{R}^3$ una recta y un plano se cortan o son paralelos, al igual que dos planos. La primera opción, por ejemplo, es incorrecta pues falta una condición indispensable para determinar un plano a partir de una recta y es que el punto no pertenezca a la recta. ¿Por qué la tercera es incorrecta?
12) Clave: E
13) Clave D. Ver la explicación del punto 11. Aquí la primera es falsa ya que las dos rectas podían resultar alabeadas entre ellas. ¿Por qué la tercera es falsa?

5.10. SECCIÓN 9: ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

5.10.2. Respuestas a los ejercicios propuestos

11.5.1. Sí.

11.5.2. Sí.

11.5.3. Sí.

11.5.4. No.

11.5.5. No.

11.5.6. No.

11.5.7. No.

11.5.8. No.

11.5.9. No.

11.5.10. Sí.

20.9.2. Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

1) Clave: C. Se debe tener en cuenta que por la definición de V deben obtenerse matrices $M_{3\times2}$ con entradas números enteros. Así al tener un escalar α en los reales y multiplicarlo por una matriz $M_{3\times2}$ no necesariamente se obtiene una matriz con entradas números enteros.

   Por ejemplo $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $\alpha = \frac{1}{2}$ entonces $\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$ que evidentemente no tiene todas sus entradas en los enteros (de hecho, se pueden construir ejemplos de vectores $\boldsymbol{y} \in V$ tal que $\alpha\boldsymbol{y}$ carezca de entradas enteras)
2) Clave: D

3) Clave: C. Como se quiere construir el inverso se tiene que el elemento nulo es $\langle -1,-1\rangle$ (lo cual usted debió verificar en la solución a la pregunta anterior) entonces se busca un elemento de la forma $\langle a,b\rangle$ tal que $\langle x_1,y_1\rangle+\langle a,b\rangle=\langle -1,-1\rangle$ con lo que con la definición de la "suma" como $\langle x_1,y_1\rangle+\langle a,b\rangle=\langle x_1+a+1,y_1+b+1\rangle$ y operando del lado derecho se tiene que $\langle x_1+a+1,y_1+b+1\rangle=\langle -1,-1\rangle$ e igualando las componentes se obtiene que:
$x_1+a+1=-1$, $y_1+b+1=-1$ de donde $a=-x_1-2$ y $b=-y_1-2$.
Así el inverso será $\langle a,b\rangle=\langle -x_1-2,-y_1-2\rangle$
4) Clave: C
5) Clave: B
6) Clave: B. Una inspección rápida de los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ sobre el conjunto de los reales permite ver que tanto Q como R son los que involucran el elemento nulo y con ello se logra garantizar la cerradura con respecto a la suma y el producto por un escalar, y con ello son subespacios de $\mathbb{R}^2$ sobre el conjunto de los reales
7) Clave: E
8) Clave: A. Para que A sea subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se debe verificar que sea cerrado en la suma y en el producto por un escalar
   i. Para la suma sean dos matrices en W, $A=\begin{pmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}$ entonces su suma (usual en matrices) será $A+C=\begin{pmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0 & -a+(-b)\\ a+b & 0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -(a+b)\\ a+b & 0\end{pmatrix}$ que está en W.
   ii. Para el producto por un escalar α se tiene que $\alpha A=\alpha\begin{pmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\alpha a\\ \alpha a & 0\end{pmatrix}$ que está en W.
   Con esto queda verificado y por lo tanto W es un subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
   Para B se tiene que $a+d=0$ o equivalentemente $a=-d$ por lo que las matrices de B son de la forma $\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$ entonces:
   iii. Para la suma sean dos matrices en B, $A=\begin{pmatrix}x & r\\ s & -x\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}y & u\\ v & -y\end{pmatrix}$ entonces su suma (usual en matrices) será $A+C=\begin{pmatrix}x+y & r+u\\ s+v & -x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y & r+u\\ s+v & -(x+y)\end{pmatrix}$ que está en B.
   iv. Para el producto por un escalar α se tiene que $\alpha A=\alpha\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a & \alpha b\\ \alpha c & -\alpha a\end{pmatrix}$ que está en B.
   Con esto queda verificado y por tanto, B es un subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
9) Clave: E
10) Clave: C. Los conjuntos de las opciones 1 y 2 no pueden ser subespacios porque no contienen al cero del espacio vectorial. El conjunto de la opción 1 es una recta que no pasa por el origen y en el de la opción 2 cuando se hace $n=0$, $n+2=0$. Ahora, si $n+2=0$, $n=-2$. De ninguna forma, obtiene la matriz nula.

5.11. SECCIÓN 10: SEGUNDA AUTOEVALUACIÓN

5.11.2 Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

Tabla de respuestas

	A	B	C	D	E
1					■
2	■				
3				■	
4				■	
5		■			
6			■		

5.11.3. Respuestas a las preguntas abiertas

Solución al ejercicio 7: Los vectores adyacentes son $\overrightarrow{PQ}=\langle 1,1,1\rangle$, $\overrightarrow{PR}=\langle -3,0,-2\rangle$ y $\overrightarrow{PS}=\langle 3,2,-2\rangle$. De modo que el volumen es el valor absoluto de $(\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-14$. El volumen del paralelepípedo es 14 unidades cúbicas.

Solución al ejercicio 8: Los vectores directores son $\boldsymbol{v}_1=\langle 1,1,-3\rangle$ y $\boldsymbol{v}_2=\langle 1,4,-2\rangle$. Las rectas no son paralelas porque $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=\langle 10,-1,3\rangle\neq 0$. Ahora, las ecuaciones paramétricas de las rectas son:

L_1:;$x=3+t,\ y=2+t,\ z=-4-3t;\ t\in\mathbb{R}$ y

L_2:$x=-1+s,\ y=4s,\ z=1-2s;\ s\in\mathbb{R}$, de donde el sistema de ecuaciones resultante que permite saber si se cortan es $\begin{cases} 3+t=-1+s \\ 2+t=4s \\ -4-3t=1-2s \end{cases}$ que es inconsistente. Por tanto, las rectas son oblicuas o alabeadas.

5.12. SECCIÓN 11: CONJUNTO GENERADOR, ENVOLVENTE LINEAL E INDEPENDENCIA LINEAL

5.12.2. Respuestas a los ejercicios propuestos

13.5.1. S es linealmente dependiente.

13.5.2. Sí genera el espacio $\mathbb{R}^3$.

13.5.3. No.

13.5.4.
$\langle 20,6,-32\rangle=4\langle 3,-1,5\rangle-2\langle -1,4,11\rangle+3\langle 2,6,-10\rangle$.

13.5.5 S es linealmente dependiente,
$\langle 4,3,-1,0\rangle=-\langle 2,-1,2,-1\rangle+\langle 3,2,1,2\rangle+\langle 3,0,0,-3\rangle$.

13.5.6. $\beta=-9/5$.

13.5.7. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{19}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}t+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}s$ donde $s,t\in\mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} \frac{19}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores LI.

13.5.8. $\left\{\begin{pmatrix} \frac{19}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

13.5.9. a) Sí; b) No; c) Sí; d) No

5.12.3 Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

1) Clave: C. Es una pregunta teórica donde se debe recordar la equivalencia entre ocho afirmaciones frente a la matriz A. La afirmación ***NO*** equivalente es "$AX=B$ solo tiene solución trivial para todo B", pues lo que afirma es que la solución es **única** para cada B

2) Clave: C

3) Clave: D. Al calcular el wronskiano de $\{1,e^x,e^{-x}\}$ se tiene $w=\begin{vmatrix}1 & e^x & e^{-x}\\ 0 & e^x & -e^{-x}\\ 0 & e^x & e^{-x}\end{vmatrix}$ que por el método del menor será $w=1(e^xe^{-x}+e^xe^{-x})=1(2)=2\neq 0$

Nota: En las opciones B y C es necesario que usted recuerde que $\operatorname{sen}h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, y $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Una simple inspección muestra la dependencia lineal en estos casos.

4) Clave: C

5) Clave: C. Al determinar la envolvente se tiene que $a\langle 2,1,-3\rangle+b\langle 1,-1,-2\rangle=\langle x,y,z\rangle$, entonces: $\begin{cases}2a+b=x\\ a-b=y\\ -3a-2b=z\end{cases}$ en forma matricial con a y b como incógnitas será $\left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & x\\ 1 & -1 & y\\ -3 & -2 & z\end{array}\right)$que llevada a la forma escalonada es $\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & y\\ 0 & -1 & \frac{x-2y}{3}\\ 0 & 0 & \frac{5x-y+3z}{3}\end{array}\right)$, lo que implica que tendrá solución solo si $\frac{5x-y+3z}{3}=0$ o $5x-y+3z=0$ será la apariencia de la envolvente.

6) Clave: A

7) Clave: B. Nuevamente es una pregunta de índole teórica; afirmar que $|A|\neq 0$ tiene otras siete formas de ser expresada o que son matemáticamente equivalentes entre ellas, que A es el producto de matrices elementales y que las columnas de A son linealmente independientes.

8) Clave: E

9) Clave: D. La pregunta apunta a dos aspectos, la independencia lineal y la forma de la envolvente.

   a. Frente a la independencia lineal se puede verificar si los tres son L.I o si uno es combinación lineal de los otros con lo que ya serían L.D. Escogiendo esta segunda vía se tiene: $\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}=r, \alpha\langle -1,2\rangle+\beta\langle 1,-1\rangle=\langle -1,3\rangle$, de donde $-\alpha+\beta=-1$ y $2\alpha-\beta=3$, que tiene solución $\alpha=2$ y $\beta=1$ que son no nulas y, por tanto, el conjunto $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}\}$ es L.D. y cualquiera de ellos puede expresarse como una combinación lineal de los otros dos.

   b. En cuanto a la envolvente se puede determinar con solo dos de ellos, claramente se pueden emplear los tres, pero será redundante, tomando u,v tiene que:

$\alpha\langle -1,2\rangle+\beta\langle 1,-1\rangle=\langle x,y\rangle$ de donde se tiene como representación matricial: $\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & x\\ 2 & -1 & y\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -x\\ 2 & -1 & y\end{array}\right)$ y reduciendo por filas se obtiene: $\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -x\\ 0 & 1 & 2x+y\end{array}\right)$ que tiene única solución para α y β en general, lo que implica que se genera cualquier vector $\langle x,y\rangle$, es decir, $\mathbb{R}^2$

10) Clave: A

11) Clave: Se tiene $\{t^2+2t-1,t^2-1\}$ así sea $u=t^2+2t-1, v=t^2-1$, entonces:
$\alpha(t^2+2t-1)+\beta(t^2-1)=at^2+bt+c$ de donde:
$\alpha+\beta=a, 2\alpha=b, -\alpha-\beta=c$ que llevada a su representación matricial es:
$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & a\\ 2 & 0 & b\\ -1 & -1 & c\end{array}\right)$ y en forma escalonada es: $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & a\\ 0 & -2 & -2a+b\\ 0 & 0 & a+c\end{array}\right)$ que admite solución única si y solo si $a+c=0$, es decir, que solo se generan polinomios en P_2 tales que los coeficientes del término cuadrático e independiente sean de signo contrario $a=-c$.

12) Clave: E.

5.13. SECCIÓN 12: BASES Y DIMENSIÓN

5.13.2. Respuestas a los ejercicios propuestos

14.5.1. Sí lo genera y $c_1\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0 & -3\\ 5 & 7\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $+c_4\begin{pmatrix}3 & -5\\ 9 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

a. $\begin{cases} c_1=\frac{35a+2b-31c+23d}{40}\\ c_2=\frac{75a-6b-127c+111d}{160}\\ c_3=\frac{-5a+26b+17c-d}{160}\\ c_4=\frac{5a+6b+47c-31d}{160}\end{cases}$

b. Sí, porque al igualar la combinación lineal a la matriz 0, esto es $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, en el paso anterior se observa que $c_1=c_2=c_3=c_4=0$, es decir LI.

c. $\frac{143}{40}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix}+\frac{631}{160}\begin{pmatrix}0 & -3\\ 5 & 7\end{pmatrix}+\frac{39}{160}\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$-\frac{71}{160}\begin{pmatrix}3 & -5\\ 9 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 10\end{pmatrix}$

14.5.2. Una respuesta posible es que una base de la solución al espacio nulo de A es: $\left\{\begin{pmatrix}13\\ -8\\ 2\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-31\\ 19\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$, $dimS=2$.

14.5.3. $\left\{\begin{pmatrix}-5\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ es una posible respuesta.

14.5.4. $S=\left\{\begin{pmatrix}-9\\ 0\\ -1\\ 4\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ -1\\ 0\\ -4\end{pmatrix}\right\}$, $dimS=2$. Recuerde que esta es una posible respuesta.

14.5.5. Una respuesta posible es que $S=\{t^2+3t,-t+1\}$, $dimS=2$.

14.5.6. Una respuesta posible es que $\{\langle 1,-2,5\rangle,\langle 3,0,1\rangle,\langle 1,0,0\rangle\}$.

14.5.7. Una respuesta posible es que $W=\{2t^3+4t^2+t-2,2t^3+7t^2-t-2,3t^3+t^2-t+4\}$, $\dim W=3$.

14.5.8. a) No; b) Sí; c) No.

14.5.9. $b=-17/25$

14.5.10. Para cualquier valor de $a\in\mathbb{R}$, S es una base.

5.13.3. Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

1) Clave: C. Una simple inspección permite ver que las dos funciones consideradas en esta opción son de grado uno, luego es imposible que una combinación lineal de ellos genere un polinomio ax^2+bx+c y una condición indispensable para que sea base es que debe ser un conjunto generador.
2) Clave: C
3) Clave: B. Habría dos opciones, la primera es llevar cada conjunto a una matriz y encontrar la forma escalonada de cada uno de ellos y determinar cuál ***NO*** genera tres pivotes (para poder generar a $\mathbb{R}^3$. La segunda opción es una inspección de cuál vector fue introducido en el conjunto y considerar que debe ser linealmente independiente con los dados.
   Este camino permite establecer que las únicas opciones que no serían candidatas son las claves B o D. Pero otra inspección rápida permite ver que en la clave $\langle 2,-2,-2\rangle$ es una combinación lineal de $\langle 1,0,2\rangle,\langle -1,2,4\rangle$ de la forma $\alpha\langle 1,0,2\rangle+\beta\langle -1,2,4\rangle=\langle 2,-2,-2\rangle$ con $\alpha=1$ y $\beta=-1$ con lo que el conjunto $\{\langle 1,0,2\rangle,\langle -1,2,4\rangle,\langle 2,-2,-2\rangle\}$ no es base para $\mathbb{R}^3$.

4) Clave: B (parametrizando x y y).

5) Clave: D. La recta tendrá por elementos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ -2t \\ \frac{2}{3}t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ así una base elemental será $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ o cualquier múltiplo escalar de ella (o una reparametrización de ella) y tomando $3\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

6) Clave: C

7) Clave: D. Como se quiere determinar conjuntos que sean bases para $\mathbb{R}^2$, una mirada a los conjuntos descarta de entrada al numeral 3 (debe existir alguna combinación lineal de dos de los vectores que dé el tercero) y en las otras opciones debe garantizarse la independencia lineal entre ellos. Para el numeral 1 esto no se cumple, pues:
$$\langle 3,-4\rangle = -3\left\langle -1,\frac{4}{3}\right\rangle.$$

8) Clave: E

9) Clave: E. Se asume desde las condiciones dadas que B es base. Luego si los elementos deben generar a $\langle 1,-2,3\rangle$, entonces se cumplirá que: $\alpha\langle 1,0,0\rangle + \beta\langle 0,2,-3\rangle + \gamma\langle 1,1,0\rangle = \langle 1,-2,3\rangle$.
Esto implica que: $\begin{cases} \alpha+\gamma = 1 \\ 2\beta+\gamma = -2 \\ -3\beta = 3 \end{cases}$ de donde $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $\alpha = 1$

10) Clave: B

11) Clave E. Sea $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ -b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ llevada a la forma escalonada adquiere la forma $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & ab & 0 \\ 0 & 0 & -1-ab & 0 \end{array}\right)$, que admite consistencia si $-1-ab=0$, con lo que $ab=-1$, con lo que se tiene que: $x+az=0$, $y+abz=0$, $z=t$ esto equivale a tener :
$x=-at$, y, $y=-abz=z=t$, con lo que:
$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -at \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

12) Clave: A

5.14. SECCIÓN 13: TRANSFORMACIONES LINEALES, TRANSFORMACIONES MATRICIALES, KERNEL E IMAGEN

5.14.2 Respuestas a los ejercicios propuestos

15.5.1.

a. T es TL, base $KerT = \{c\}$, donde $c \in \mathbb{R}$, base $ImT = \{2t,1\}$, $nu(T)=1$, $ran(T)=2$.

b. L no es TL, luego las demás preguntas no aplican.

c. Tes transformación lineal,
base $KerT = \{\langle 0,0,0\rangle\}$, base
$\operatorname{Im} T = \{\langle 2,0,0\rangle, \langle 0,-1,3\rangle, \langle 0,1,1\rangle\}$,
$nuT=0, ranT=3$.

d. T no es TL.

e. L es TL, posibles respuestas base
$KerT = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, base
$\operatorname{Im} L = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $nuT=1, ranT=3$.

15.5.2. $T\langle 1,1\rangle = \left\langle -\frac{11}{5}, \frac{12}{5}\right\rangle$;
$T\langle x,y\rangle = \left\langle -\frac{19}{10}x - \frac{3}{10}y, \frac{13}{10}x + \frac{11}{10}y\right\rangle$.

15.5.3. $T\langle 17,-17\rangle = \langle 3,-17,-2\rangle$;
$T\langle x,y\rangle = \left\langle \frac{7}{17}x + \frac{4}{17}y, y, \frac{1}{17}x + \frac{3}{17}y\right\rangle$,

15.5.4.

a. $T(x^2+3x-5) = 7x^2+8x-9$

b. Sí
c. No
d. No
e. Sí
f. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
g. Posible respuesta $\{-2x^2 + x + 1\}$.
h. Posible respuesta $\{x^2 + 1, 2x^2 + x\}$.
i. $\dim P_2 = nuT + ranT; 3 = 1 + 2$.

15.5.5.

a. $T\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$
b. No
c. Sí
d. Sí
e. No
f. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
g. Posible respuesta $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
h. Posible respuesta $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
i. $\dim \mathbb{R}^3 = nuT + ranT; 3 = 1 + 2$.

5.14.3. Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

1) Clave: D. La matriz asociada a la transformación de rotación está dada por: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ con θ medido en sentido antihorario. Como la rotación se hace en sentido horario se debe tener en cuenta que el ángulo de 45° en sentido horario equivale a 315° en sentido antihorario, por lo que la matriz de rotación será $\begin{pmatrix} \cos 315° & -\text{sen} 315° \\ \text{sen} 315° & \cos 315° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, que aplicado a $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ será $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
2) Clave: A
3) Clave: D. Es una pregunta que se puede responder desde los teoremas de las transformaciones y particularmente desde las propiedades de las transformaciones lineales. Las tres primeras afirmaciones son equivalentes, luego la única que se diferencia en su implicación es la D, que debe ser la única verdadera. Otra vía es aplicar la transformación a un par de vectores en P_2 y ver que T es una transformación **NO** lineal.
4) Clave: C
5) Clave: C. Es una aplicación de cambio de base, es decir, cuando se abordan espacios en bases no canónicas. De manera general se debería verificar (aunque desde el enunciado se puede asumir) que es una base. Eso se puede hacer verificando que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, luego es una base. Luego, C será $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y de allí que la matriz A asociada a la transformación será: $A = C^{-1} = \frac{Adj(C)}{\det(A)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, y por tanto, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3/2x + 1/2y \end{pmatrix}$
6) Clave: D
7) Clave: B. Al hacer una rotación de una región, ni su perímetro ni su área cambian (invariantes ante una rotación). De otra parte, la matriz asociada a la transformación T de rotación un ángulo θ medido en sentido antihorario es $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Teniendo en cuenta que el

ángulo es de 135°, entonces será $\begin{pmatrix} \cos 135° & -\text{sen}135° \\ \text{sen}135° & \cos 145° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, con lo cual ya se puede concluir.

8) Clave: A

9) Clave: E. $T:\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y+2z \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} x-y \\ y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $\begin{matrix} x-y=0 \\ y+2z=0 \end{matrix}$, lo que implica que: $x=y, y=-2z, z=t$, y por tanto, $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ será el Kernel de T, y por consiguiente, $nuT=1$.

10) Clave: C

11) Clave B. Nuevamente es una pregunta relacionada con el cambio de base en bases no canónicas (la base canónica es B_0). Se debe expresar primero $X_{B_0} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ en la base B_1, entonces $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = a\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, de donde $\begin{cases} 3a+2b=7 \\ a-b=4 \end{cases}$ así $a=3, b=-1$. Ahora se transforma la base B_1 en términos de B_2, así:

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

y, resolviendo los correspondientes sistemas $\begin{cases} m+3n=3 \\ -m-n=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} p+3q=2 \\ -p-q=-1 \end{cases}$ se obtiene que $m=-3, n=2, p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$

De donde $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$

12) Clave: B.

5.15. SECCIÓN 14: EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

5.15.2. Respuestas a los ejercicios propuestos

16.5.1.

a. No.

b. Sí.

c. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d. $L:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \to L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ 2b \\ c \\ 2a-b \end{pmatrix}$$

e. $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

f. $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

g. $nuL=0, ranL=4$, entonces $\dim(\mathbb{R}^4)=4=0+4$.

h. $\lambda_1=1$, multiplicidad $1, \lambda_2=-1$, multiplicidad 1, $\lambda_3=2$, multiplicidad 2.

i. $E_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $E_{-1} = \left\{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $E_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

j. E_1 deja idéntico al vector, E_{-1} lo invierte y E_2 lo dilata al doble.

16.5.2.

a. Sí.

b. Sí.

c. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d. $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 2b+c \\ 2a+c \end{pmatrix}$$

e. Posible respuesta $\left\{\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

f. $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ es una posible respuesta.

g. $nuL = 1, ranL = 2$, entonces $dim P_2 = 3 = 1 + 2$.

h. $\lambda = 0$, multiplicidad 1.

i. $E_{\lambda_1 = 0} = \left\langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

j. La transformación lineal actúa como un anulador para los vectores en $\left\langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

16.5.3.

a. No.

b. Sí, para $\langle 1,1,1 \rangle \in V = \mathbb{R}^3$.

c. $A_T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

d. $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-y+6z \\ 2x+y+6z \\ 2x-y+8z \end{pmatrix}$$

e. $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

f. $\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right\}$.

g. $nuL = 0, ranL = 3$, entonces $dim\,\mathbb{R}^3 = 3 = 0 + 3$.

h. $\lambda_1 = 2$, multiplicidad 2, $\lambda_2 = 9$, multiplicidad 1.

i. $E_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $E_9 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

j. E_2 lo dilata al doble, E_9 lo dilata 9 veces.

5.15.3. Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

1) Clave: D. Dada la transformación, se analiza cómo opera sobre la base canónica de P_2
$T(a + bx + cx^2) \mapsto -2c + (a + 2b + c)x + (a + 3c)x^2$, así:
$T(1) = x + x^2,\ T(x) = 2x,\ T(x^2) = -2 + x + 3x^2$, de donde:
$$T(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, T(x^2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
Así la matriz asociada a la transformación será en la base canónica: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, y por tanto, los eigenvalores deben satisfacer $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$,
que equivale a:
$(2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$,
que se satisface si $\lambda = 2$, $\lambda = 1$.
2) Clave: A
3) Clave: C. Aquí ya se tiene la matriz de transformación. Luego debe ocurrir que: $\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ \alpha^3 & -3\alpha^2 & 3\alpha-\lambda \end{pmatrix} = 0$, es decir, que: $\lambda^2(3\alpha - \lambda) + \alpha^3 - 3\lambda\alpha^2 = 0$. Operando y ordenando equivale a:
$\alpha^3 - 3\lambda\alpha^2 + 3\alpha\lambda^2 - \lambda^3 = 0$ o $(\alpha - \lambda)^3 = 0$,

lo que implica que $\lambda = \alpha$, pero como el polinomio característico es cúbico, se tiene un eigenvalor de multiplicidad 3, con lo que: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha$.

4) Clave: D

5) Clave: A. Esta pregunta busca diferenciar el polinomio característico, la ecuación característica y los eigenvalores. La pregunta está centrada en: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, entonces el polinomio propio asociado a la matriz de transformación se obtiene al hacer:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -4 + (3-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda)$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 1$$

6) Clave: D

7) Clave: A. Dado que la ecuación característica es: $\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)^3 = 0$, la matriz A_T debe ser del mismo orden de la ecuación, esto es, 6, y una simple inspección permite establecer que la solución a la misma implica 3 eigenvalores $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = 2$ de multiplicidades algebraicas dos, uno y tres, respectivamente), y por tanto, va a existir al menos un vector propio asociado a cada uno de ellos.

8) Clave: A

9) Clave: E. Los eigenvalores de la matriz asociada a la transformación están dados por:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(3+\lambda) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$= (\lambda+2)(\lambda+1) = 0$$

Es decir, $\lambda = -2$, $\lambda = -1$.

Para determinar los eigenvectores se tiene:

a. Para $\lambda = -2$, se tiene que:
$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ que equivale a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, y por tanto, $\binom{-2}{1}$ es un eigenvector asociado.

b. Para $\lambda = -1$, se tiene que:
$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ que equivale a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, y por tanto, $\left(\frac{-1}{1}\right)$ es un eigenvector asociado.

10) Clave: D.

11) Clave: E. Primero se debe entender la transformación. Esta puede ser reescrita como $T: P_2 \to P_2$
$T(a + bx + cx^2) \mapsto a + b(2x+1) + c(2x+1)^2$
Ahora, realizando la transformación de la base canónica se tiene que:
$T(1) \mapsto 1$, $T(x) = 2x + 1$, $T(x^2) = 4x^2 + 4x + 1$, y por tanto, la matriz de transformación en la base canónica es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
De otra parte, los eigenvalores asociados satisfacen $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$, que al ser triangular lleva por inspección a que los eigenvalores de la matriz asociada sean:

$$\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 4.$$

12) Clave: A

5.16. SECCIÓN 15: APLICACIÓN Y MODELACIÓN CON BASE EN LOS EIGENVALORES Y LOS EIGENVECTORES

17.5.1. Respuestas a los ejercicios propuestos

Año n	Número de jóvenes $p_{j,n}$	Número de adultas $p_{a,n}$	Población total de hembras T_n en el año n	$p_{j,n}/p_{a,n}$	T_n/T_{n-1}
0	0	40	40	0	-
1	160	32	192	5	4,8
2	128	137	265	0,93002	1,3833
3	550	199	749	2,7574	2,824
10	84.709	45.550	130.259	1,8596	2,0993
19	74.077.962	39.262.064	113.340.026	1,8867	2,1207
20	157.048.257	832.642.249	98.969.0506	1,8861	2,1202

La relación de largo plazo luego de ver la tabla y de corroborar calculando los eigenvalores de la matriz A, que son $\lambda_1 = -1.3204\ \lambda_2 = 2.1204$, se deduce que la población aumenta en 112%, así mismo que la relación de p_(j,n) a p_(a,n), es 1.88 que significa que por cada hembra adulta hay 1.88 hembras jóvenes.

17.5.2.

Año n	Número de jóvenes $p_{j,n}$	Número de adultas $p_{a,n}$	Población total de hembras T_n en el año n	$p_{j,n}/p_{a,n}$	T_n/T_{n-1}
0	0	10	10	0	-
1	20	3	23	6,6666	2,3
2	6	4	10	1,2244	0,4739
3	9	2	11	3,6764	1,144
10	1	0	1	2,4632	0,7899
19	0	0	0	-	-
20	0	0	0	-	-

Los eigenvalores de la matriz A, que son $\lambda_1 = -0.5\lambda_1$ $\lambda_1 = 0.8$, aunque este segundo valor nos indica que se deduce que la población en 20%, al ver los resultados de la tabla se deduce que la población se extingue.

17.5.3. En los primeros 5 años se tienen 305 hembras en la primera clase, 5 en la segunda, 12 en la tercera y 7 en la cuarta. En los primeros 10 años se tienen 124 hembras en la primera clase, 152 en la segunda, 3 en la tercera y 3 en la cuarta. En los primeros 15 años se tienen 790 hembras en la primera clase, 62 en la segunda, 91 en la tercera y 0 en la cuarta.

5.16.2. Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

1) Clave: C. Es un problema que sólo busca determinar su capacidad para interpretar información. Dado que A tiene la forma $A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ y aplicando la notación dada en el enunciado (en particular que α y β son proporciones) se tiene que $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$
2) Clave: D
3) Clave: C. La solución se puede encontrar por varias vías una en particular es que dado que el modelo es $P_n = A^n P_o$, con $n = 5$ y $P_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ entonces se tiene que $P_n = A^5 \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ en este caso con $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$ se tiene que $A^5 = \begin{pmatrix} 6,11 & 21,32 \\ 4,26 & 11,79 \end{pmatrix}$ y por lo tanto
$P_n = \begin{pmatrix} 4,39 & 10,18 \\ 2,03 & 7,10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 81 \end{pmatrix}$
Aquí se debe anotar que la potencia de la matriz se calculó redondeada en sus elementos a dos decimales. Esto lleva a que la población total es de 204 hembras y en ningún caso será mayor. Así se opta por 198 como población total de hembras. Un proceso que lo llevará a este valor es ir calculando la nueva población en cada periodo e ir redondeando la población a números enteros inmediatamente anterior a número obtenido (por ejemplo, si da para $P_1 = AP_o = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 26 \end{pmatrix}$,

$P_2 = AP_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 38,8 \end{pmatrix}$ se aproxima realmente a $P_2 = \begin{pmatrix} 78 \\ 38 \end{pmatrix}$ y así sucesivamente.

Nota: en el Álgebra Lineal de Grossman, Sección 6.2 (Grossman, Álgebra Lineal, 2007), usted encontrará un análisis muy interesante sobre los procesos de aproximación y redondeo y sus implicaciones en los procesos de modelado.

4) Clave: C

5) Clave: C. Nuevamente es una pregunta que apunta a la interpretación de información, dado que A tiene la forma $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ y la forma de la cónica es $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ con $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$ entonces $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, y por tanto, la matriz A asociada a la cuadrática es $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

6) Clave: A

7) Clave: E. En la pregunta anterior usted ha establecido que los valores propios son:
$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{10}}{2}, \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{10}}{2}$ y por tanto, los vectores propios tendrán que satisfacer la forma $\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 2-\lambda & 0 \end{array}\right)$ y realizando las operaciones para $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{10}}{2}$ se tiene que:
$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\frac{3+\sqrt{10}}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 2-\frac{3+\sqrt{10}}{2} & 0 \end{array}\right)$ y llevando a la forma estándar se tiene que $\boldsymbol{v}_1 = \left\langle \begin{matrix} \frac{\sqrt{10}-1}{3} \\ 1 \end{matrix} \right\rangle$. Análogamente para $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{10}}{2}$ se tiene $\boldsymbol{v}_1 = \left\langle \begin{matrix} -\frac{\sqrt{10}+1}{3} \\ 1 \end{matrix} \right\rangle$

8) Clave: E

9) Clave: A. La forma del sistema es $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = cx_1(t) + dx_2(t) \end{cases}$, y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y como el modelo para la cantidad de sal presente en cada tanque lleva al sistema $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{2}{25}x_1(t) + \dfrac{1}{50}x_2(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{2}{25}x_1(t) - \dfrac{2}{25}x_2(t) \end{cases}$, entonces
$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{25} & \frac{1}{50} \\ \frac{2}{25} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix}$ así los valores propios deben satisfacer que $\begin{vmatrix} -\frac{2}{25} - \lambda & \frac{1}{50} \\ \frac{2}{25} & -\frac{2}{25} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + \frac{2}{25})^2 - \frac{1}{625} = 0$, que da como solución: $\lambda = -\frac{1}{25}$ y $\lambda = -\frac{3}{25}$.

10) Clave: B

11) Clave E. Como $\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{At}\boldsymbol{x}_0$, donde:
$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{25} & \frac{1}{50} \\ \frac{2}{25} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix}$, que tiene como valores propios $\lambda_1 = -\frac{1}{25}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{25}$ y $e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1}$, donde C es una matriz cuyas columnas son los vectores propios de A, siendo estos $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y por tanto, la inversa de C se tiene que: $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

De otra parte, $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{25}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{3}{25}t} \end{pmatrix}$ y por tanto, se tiene que, con $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{25}{2}e^{-\left(\frac{t}{25}\right)} + \dfrac{25}{2}e^{-\left(\frac{3t}{25}\right)} \\ 25e^{-\left(\frac{t}{25}\right)} - 25e^{-\left(\frac{3t}{25}\right)} \end{pmatrix}$$

Este problema requiere demasiados procesos y cálculos que usted debe reconstruir ya que no se muestran en su totalidad.

12) Clave: B

5.17. SECCIÓN 16: TERCERA AUTOEVALUACIÓN

5.17.2. Respuestas a las Preguntas de tipo Saber Pro

Tabla de respuestas

	A	B	C	D	E
1					■
2		■			
3			■		
4				■	
5	■				
6				■	

5.17.3. Respuestas a las preguntas abiertas

Solución al ejercicio 7: hay que encontrar:

$a :=$ coeficiente de x^2 en el polinomio cuadrático.

$b :=$ coeficiente de x en el polinomio cuadrático.

$c :=$ coeficiente de 1 en el polinomio cuadrático.

Como el polinomio de interpolación pasa por los tres puntos, las ecuaciones se conforman así: Punto $(-2,1)$ $4a-2b+c=1$; Punto $(5,6)$ $25a+5b+c=6$; Punto $(1,7)$ $a+b+c=7$, donde $a \neq 0$ y b,c son irrestrictas o libres.

El sistema es $\begin{cases} 4a-2b+c=1 \\ 25a+5b+c=6 \\ a+b+c=7 \end{cases}$, su matriz aumentada es: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 1 \\ 25 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$. La matriz escalonada reducida correspondiente es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9/28 \\ 0 & 1 & 0 & 47/28 \\ 0 & 0 & 1 & 79/14 \end{array}\right)$. Para resolver, también es posible usar la regla de Cramer. Finalmente, el polinomio cuadrático que interpola los puntos es:

$$p(x) = \frac{-9}{28}x^2 + \frac{47}{28}x + \frac{79}{14}.$$

Solución al ejercicio 8: la transformación dada ya es matricial, por lo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Para calcular el kernel y la imagen es suficiente con encontrar la matriz escalonada reducida de $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{array}\right)$, tal matriz es $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$. De aquí que, $\ker T = 0$ e $\operatorname{Im} T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$. Por lo que, $nuT = 0$ y $ranT = 2$. Así, $dim\, \mathbb{R}^2 = 2 = 0 + 2$.

Ahora, los eigenvalores de la matriz asociada a la transformación están dados por:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5) = 0$$

Es decir, $\lambda = 1, \lambda = -5$.

Para determinar los eigenvectores se tiene:

a. Para $\lambda = 1$, se tiene que: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ que equivale a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde $\left(\frac{-2}{1}\right)$ es un eigenvector asociado. Esto indica que la transformación actúa como la identidad sobre los vectores en $\left\langle \left(\frac{-2}{1}\right) \right\rangle$.

b. Para $\lambda = 5$, se tiene que: $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ que equivale a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un eigenvector asociado. En este caso, la transformación actúa como una dilatación a cinco veces el tamaño del vector original siempre que estos se encuentren en $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

21 Referencias

Anderson, D., Sweeny, D., y Williams, T. (1998). *Métodos cuantitativos para los negocios* (séptima ed.) México: International Thomson Editores.

Anton, H. (1984). *Introducción al álgebra lineal*. México: Limusa.

Aya, O.; Echeverry, A., y Samper, C. (2016). ¿Es el cuadrado un rectángulo? *Sophia, 12*(1), 139-158.

Barragán, S. (2016). Modelo multicriterio para la propensión a la permanencia en la educación superior. *Revista de educación en ingeniería, 12*(22), 52-56.

Barragán, S. (2019). Modelación matemática en cursos universitarios: una propuesta metodológica. *Mate Compu 2019*. Matanzas: Universidad de Matanzas Camilo Cienfuegos. Obtenido de: http://cict.umcc.cu

Barragán, S., y Cala, F. (2019). Educación STEM integrada como estrategia para la permanencia estudiantil en la educación superior. En M. N. (ed.), *Educación STEM/STEAM: Apuestas hacia la formación, impacto y proyección de seres críticos* (1 ed., 85-110). Santa Ana de Coro: Fondo Editorial Universitario Servando Garcés, Universidad Politécnica Territorial de Falcón. Obtenido de https://alinin.org/wp-content/uploads/2020/06/Educaci%C3%B3n-STEM_STEAM.pdf

Barragán, S.; Bogoya, D.; Contento, M., y Ocaña, A. (2014). *Una aproximación a la construcción de ítems para pruebas en matemáticas*. Obtenido de http://avalon.utadeo.edu.co/servicios/ebooks/una_aproximacion_a_la_construccion_de_items/

Contento, M. (2019). *Estadística con aplicaciones en R* (vol. 1). Bogotá: Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano. Obtenido de https://www.utadeo.edu.co/sites/tadeo/files/node/publication/field_attached_file/libro_estadistica_con_aplicaciones_en_r_def_ago_11.pdf

Entrevista a Julio Ríos, @julioprofe en Youtube (13 de septiembre de 2010). Recuperado el 1 de agosto de 2018, de Blogdelanacho: http://www.pasaralaunacional.com/2010/09/entrevista-julio-rios-julioprofe-en.html

Grossman, S. (1996). *Álgebra Lineal* (quinta ed.) México: McGraw-Hill.

Grossman, S. (1998). *Aplicaciones de Álgebra Lineal*. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Grossman, S. (2007). *Álgebra Lineal*. México: McGraw-Hill.

Hoffman, K., y Kunze, R. (1973). *Álgebra Lineal* (primera ed.). México: Prentice Hall.

Kolman, B., y Hill, D. (2013). *Álgebra Lineal. Fundamentos y Aplicaciones* (primera ed.). Bogotá: Pearson.

Larson, R., y Edwards, B. (2010). *Cálculo2. De varias variables*. México: McGraw-Hill.

Lezama, O. (30 de junio de 2018). *Cuadernos de Álgebra SAC2*. Obtenido de Álgebra Lineal: https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=dW5hbC5lZHUuY298c2FjMnxneDo0MGRjMDU1YmRhZTA3N2M1

Mathur, K., y Solow, D. (1996). *Investigación de Operaciones. El arte de la toma de decisiones*. México: Prentice Hall.

Melo, J. (2005). Esferas, cuaterniones y matrices. *Ensayos de ciencias exactas y naturales*(2), 45-54.

Real Academia de la Lengua Española (2018). *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 24 de agosto de 2018, de Real Academia de la Lengua Española: Real Academia de la Lengua Española.

Solomon, C., & Breckon, T. (2011). *Fundamentals of digital image processing*. Chichester: John Wiley & Sons.

Stewart, J. (2012). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (séptima ed.) México: Cengage Learning.

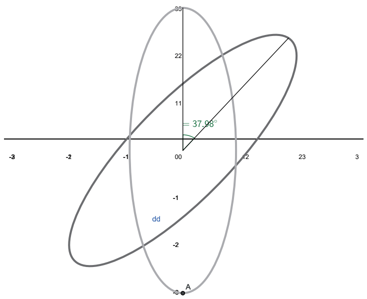
Vargas, E.; Rodríguez, G.; Bernal, R.; Muñoz, O.; y Gutiérrez, J. (2012). Diseño de casos para argumentación matemática. En L. Maldonado, R. Drachman, y R. De Groot, *Argumentación para el aprendizaje colaborativo de la matemática* (121-126). Bogotá: Ediciones Universidad Central.

22 Los Autores

Sandra Patricia Barragán Moreno es doctora en modelado para la política y la gestión pública, por la Università degli Studi di Palermo y por la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano; magíster en ciencias matemáticas, de la Universidad Nacional de Colombia. En su experiencia docente ha impartido las asignaturas de álgebra lineal, cálculo diferencial, integral y vectorial, y ecuaciones diferenciales. En el trabajo de investigación, la profesora Barragán se ha enfocado en la modelación matemática para los fenómenos sociales como la retención y deserción estudiantil, así como la calidad de la educación. Como profesora de la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano ha coordinado los cursos de álgebra lineal, en donde surgió el interés a través de la concertación con los colegas de escribir un libro de álgebra lineal que contribuyera al éxito académico de los estudiantes.

Julio César Melo Martínez es magíster en economía, de la Universidad Javeriana, y licenciado en matemáticas, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. El profesor Melo tiene experiencia en docencia universitaria de aproximadamente 23 años, en los que ha laborado en la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, la Pontificia Universidad Javeriana, la Universidad Autónoma de Colombia y la Universidad Militar Nueva Granada. En estas universidades ha orientado las asignaturas de álgebra lineal, cálculo diferencial, integral y vectorial, así como de ecuaciones diferenciales.

Orlando Aya Corredor es magíster en docencia de la matemática, especialista en didáctica de la matemática y licenciado en física, grados otorgados por la Universidad Pedagógica Nacional. El profesor Aya es catedrático en la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano y profesor de medio tiempo de la Universidad Pedagógica Nacional; en estas universidades el profesor ha trabajado en asignaturas como álgebra lineal, precálculo, cálculo diferencial, integral y vectorial y ecuaciones diferenciales. En las asignaturas, el profesor Aya ha contribuido con trabajos en innovación pedagógica.



Este libro se terminó de editar en
la Editorial UTADEO en el mes de
noviembre de 2021

Julio César Melo Martínez

Magíster en Economía de la Universidad Javeriana y Licenciado en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Julio es profesor de la Universidad Militar Nueva Granada.

Orlando Aya Corredor

Docente especialista en Didáctica de la Matemática y Magister en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Orlando es rofesor planta medio tiempo Universidad Pedagógica Nacional y catedrático de la Universidad Jorge Tadeo Lozano.

Álgebra lineal. Modelación, solución de problemas y ejercicios es un texto de apoyo al estudio de los conceptos, los algoritmos, la solución de problemas y la modelación matemática. Los dominios conceptuales de un curso básico de álgebra lineal se abordan de forma progresiva, iniciando con ejercicios resueltos con gran detalle en explicación y en cálculos, avanzando hacia ejercicios guiados que mediante pasos propuestos invitan a completar la solución y a activar procesos cognitivos asociados a la escritura a mano. Esta evolución se ve confrontada mediante ejercicios propuestos similares a los que se encontrarían en un libro de texto típico, considerando que la preparación académica debe responder tanto a escenarios nuevos como tradicionales. La propuesta pedagógica implementada en este libro fue validada internacionalmente mediante diversas ponencias, capítulos de libro y artículos.

En ese orden de ideas, al proceso desarrollo se integran baterías de preguntas de selección múltiple que convidan a respuesta basadas en argumentación matemática más que en cálculos extensos. Es de resaltar que este libro es un producto bibliográfico transmedia, puesto que contiene noventa y dos (92) videos de los mismos autores, con los cuales se ofrece un moderno acercamiento audiovisual al álgebra lineal. Finalmente, el libro cuenta con tres autoevaluaciones que recorren ejercicios, problemas o situaciones, y todos los ejercicios tienen respuestas al final del libro, lo cual favorece la validación del trabajo individual como otro peldaño hacia el conocimiento.

EDITORIAL UTADEO